<u>**RAPPEL :**</u> Fonctions de Green à T=0

Fonction de Green ordonnée en temps :

$$G_{\alpha\beta}(t-t') = -i\langle\phi|T\hat{\psi}_\alpha(t)\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')|\phi\rangle$$

Fonction de Green retardée :

$$G^R_{\alpha\beta}(t-t') = -i\theta(t-t')\langle\phi|[\hat{\psi}_\alpha(t),\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')]_\mp|\phi\rangle$$

Fonction de Green avancée :

$$G^A_{\alpha\beta}(t-t') = i\theta(t'-t)\langle\phi|[\hat{\psi}_\alpha(t),\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')]_\mp|\phi\rangle$$

Invariance par translation :

conservation de la quantité de mouvement

$$G_{\alpha\beta}(t-t') \rightarrow G_{\vec{k}\vec{k}'}(t-t') = G(\vec{k},t-t')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Fonctions de Green à T=0

Représentation spectrale (Lehmann) :

$H^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle = E_\lambda^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle$ – base complète de l'espace de Hilbert à N particules

$$G(\vec{k},t) = -i\sum_\lambda \left\{\theta(t)e^{-i(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \mp \theta(-t)e^{i(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2\right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},t) = \mp i\theta(\pm t)\sum_\lambda \left\{e^{-i(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \mp e^{i(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2\right\}$$

$$G(\vec{k},\omega) = \sum_\lambda \left\{\frac{|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega-(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)+i\eta} \mp \frac{|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega+(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)-i\eta}|\right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \sum_\lambda \left\{\frac{|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega-(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)\pm i\eta} \mp \frac{|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega+(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)\pm i\eta}|\right\}$$

Fonctions de Green à T=0

$$G(\vec{k},\omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} + i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} - i\eta} | \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} \pm i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} \pm i\eta} | \right\}$$

1er terme :

excitation du système par création d'une particule à $\omega > \mu$

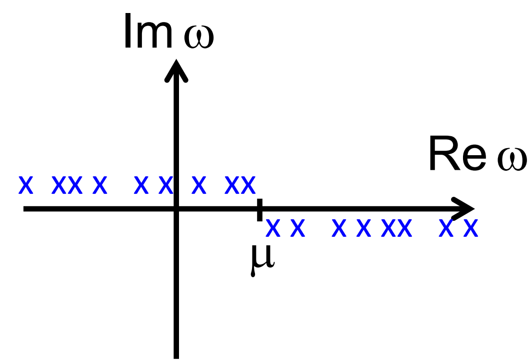
2nd terme :

excitation du système par annihilation d'une particule

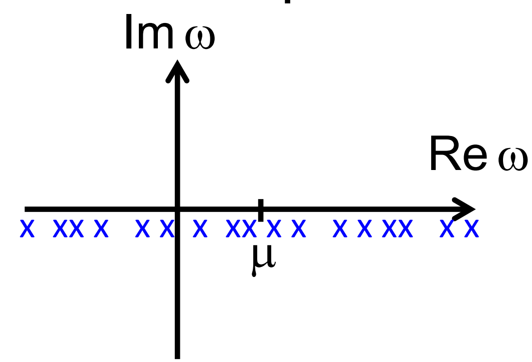
= création d'un trou à $\omega < \mu$

Fonctions de Green à T=0

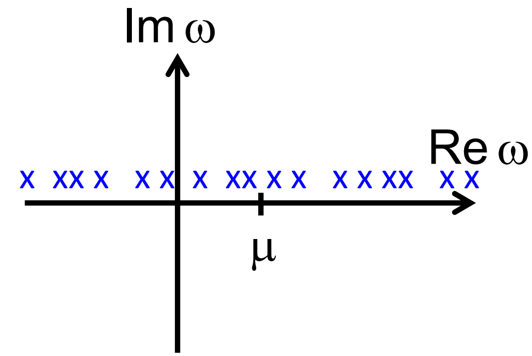
Propriétés :



- Fonction de Green ordonnée en temps :
  - pôles en dessous de l'axe réelle pour $\omega > \mu$
  - pôles au dessus de l'axe réelle pour $\omega < \mu$



- Fonction de Green retardée :
  - tous les pôles en dessous de l'axe réelle



- Fonction de Green avancée :
  - tous les pôles au dessus de l'axe réelle

Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

$$G(\vec{k},\omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} + i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} - i\eta} | \right\}$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_{+}(\vec{k},\omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} \mp \frac{J_{-}(\vec{k},\omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} \pm i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} \pm i\eta} | \right\}$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_{+}(\vec{k},\omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \mp \frac{J_{-}(\vec{k},\omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \right\}$$

avec $J_{+}(\vec{k},\omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)})$

$$J_{-}(\vec{k},\omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)})$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés : $$J_+(\vec{k},\omega') = 2\pi \sum_\lambda |\langle \lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \delta(\omega' - \epsilon_\lambda^{(N+1)})$$
$$J_-(\vec{k},\omega') = 2\pi \sum_\lambda |\langle \lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \delta(\omega' + \epsilon_\lambda^{(N-1)})$$

à noter … $$J_+(\vec{k},\omega' < 0) = 0$$
$$J_-(\vec{k},\omega' > 0) = 0$$

Parties réelle et imaginaire des fonctions de Green :

$$\frac{1}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} = P\frac{1}{\omega - \mu - \omega'} \mp i\pi\delta(\omega - \mu - \omega')$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés : $$G(\vec{k},\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'+i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'-i\eta}\right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'\pm i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'\pm i\eta}\right\}$$

$$\frac{1}{\omega-\mu-\omega'\pm i\eta} = P\frac{1}{\omega-\mu-\omega'} \mp i\pi\delta(\omega-\mu-\omega')$$

$$\Re G(\vec{k},\omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k},\omega) = P\int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega') \mp J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}$$

$$\Im G(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) \mp \frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu) = \begin{cases} -\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) & \omega-\mu>0 \\ \mp\frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu) & \omega-\mu<0 \end{cases}$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \mp\left(\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) \mp \frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu)\right) = \begin{cases} \mp\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) & \omega-\mu>0 \\ \mp(\mp)\frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu) & \omega-\mu<0 \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés : $G(\vec{k},\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'+i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'-i\eta}\right\}$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega') \mp J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega' \pm i\eta}$$

$$\frac{1}{\omega-\mu-\omega' \pm i\eta} = P\frac{1}{\omega-\mu-\omega'} \mp i\pi\delta(\omega-\mu-\omega')$$

Liens entre les différentes fonctions de Green :

$$\Re G(\vec{k},\omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k},\omega) = P\int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega') \mp J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \begin{cases} \mp\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) = \pm\Im G(\vec{k},\omega) & \omega > \mu \\ \frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu) = \mp\Im G(\vec{k},\omega) & \omega < \mu \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Liens entre parties réelle et imaginaire :

$$\Re G(\vec{k},\omega) = P\int \frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}\right\}$$

$$= P\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'} \mp P\int_{-\infty}^{0} \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}$$

$$= P\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{-2\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)}{\omega-\mu-\omega'} \mp P\int_{-\infty}^{0} \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\mp 2\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)}{\omega-\mu-\omega'}$$

$$= -\frac{1}{\pi}P\int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)\mathrm{sign}(\omega')}{\omega-\mu-\omega'} = -\frac{1}{\pi}P\int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k},\omega')\mathrm{sign}(\omega'-\mu)}{\omega-\omega'}$$

$$\Re G(\vec{k},\omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k},\omega) = P\int \frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega') \mp J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \begin{cases} \mp\frac{1}{2}J_+(\vec{k},\omega-\mu) = \pm\Im G(\vec{k},\omega) & \omega>\mu \\ \mp(\mp)\frac{1}{2}J_-(\vec{k},\omega-\mu) = \mp\Im G(\vec{k},\omega) & \omega<\mu \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Liens entre parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}\Re G(\vec{k},\omega) &= P\int \frac{d\omega'}{2\pi}\left\{\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'}\right\} \\ &= P\int_0^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'} \mp P\int_{-\infty}^{0}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'} \\ &= P\int_0^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{-2\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)}{\omega-\mu-\omega'} \mp P\int_{-\infty}^{0}\frac{d\omega'}{2\pi}\frac{\mp 2\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)}{\omega-\mu-\omega'} \\ &= -\frac{1}{\pi}P\int d\omega'\,\frac{\Im G(\vec{k},\omega'+\mu)\mathrm{sign}(\omega')}{\omega-\mu-\omega'} = -\frac{1}{\pi}P\int d\omega'\,\frac{\Im G(\vec{k},\omega')\mathrm{sign}(\omega'-\mu)}{\omega-\omega'}\end{aligned}$$

Relation de Kramers-Kronig:

$$\Re G(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{\pi}P\int d\omega'\,\frac{\Im G(\vec{k},\omega')\mathrm{sign}(\omega'-\mu)}{\omega-\omega'}$$

Fonctions de Green à T=0

Résumé :

- liens entre les différentes fonctions de Green

$$\Re G(\vec{k},\omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k},\omega)$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \pm \Im G(\vec{k},\omega)\,\mathrm{sign}(\omega-\mu)$$

- liens entre parties réelle et imaginaire

$$\Re G(\vec{k},\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k},\omega')\,\mathrm{sign}(\omega'-\mu)}{\omega-\omega'}$$

$\omega > \mu$: excitation du système par création d'une particule

$\omega < \mu$: excitation du système par annihilation d'une particule
= création d'un trou

Représentation d'interaction

$H = H_0 + V$

avec

- H_0 : Hamiltonien simple (particule libre)
- V : perturbation (interactions)

Comment procéder
quand on ne peut pas résoudre exactement
le système décrit par l'Hamiltonien H ?

Calcul perturbatif …

Représentation d'interaction

$H = H_0 + V$

Schrödinger :

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-iH(t-t')}|\psi_S(t')\rangle \equiv U(t)U^\dagger(t')|\psi_S(t')\rangle = U(t-t')|\psi_S(t')\rangle$$

$$\hat{O}_S = cste$$

Heisenberg :

$$|\psi_H\rangle = cste$$

$$\hat{O}_H(t) = e^{iH(t-t')}\hat{O}_H(t')e^{-iH(t-t')}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}_H(t) = i[H, \hat{O}_H(t)]$$

Interaction :

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t}e^{-iHt}e^{iHt'}e^{-iH_0 t'}|\psi_I(t')\rangle \equiv U(t)U^\dagger(t')|\psi_I(t')\rangle \equiv S(t,t')|\psi_I(t')\rangle$$

$$\hat{O}_I(t) = e^{iH_0(t-t')}\hat{O}_I(t')e^{-iH_0(t-t')}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}S(t,t') = -iV_I(t)S(t,t')}$$