

RAPPEL : Fonctions de Green à T=0

Fonction de Green ordonnée en temps :

$$G_{\alpha\beta}(t - t') = -i\langle\phi|T\hat{\psi}_{\alpha}(t)\hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(t')|\phi\rangle$$

Fonction de Green retardée :

$$G_{\alpha\beta}^R(t - t') = -i\theta(t - t')\langle\phi|[\hat{\psi}_{\alpha}(t), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(t')]_{\mp}|\phi\rangle$$

Fonction de Green avancée :

$$G_{\alpha\beta}^A(t - t') = i\theta(t' - t)\langle\phi|[\hat{\psi}_{\alpha}(t), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(t')]_{\mp}|\phi\rangle$$

Invariance par translation :

conservation de la quantité de mouvement

$$G_{\alpha\beta}(t - t') \rightarrow G_{\vec{k}\vec{k}'}(t - t') = G(\vec{k}, t - t')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Fonctions de Green à T=0

Représentation spectrale (Lehmann) :

$H^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle = E_\lambda^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle$ – base complète de l'espace de Hilbert
à N particules

$$G(\vec{k}, t) = -i \sum_{\lambda} \left\{ \theta(t) e^{-i(E_\lambda^{(N+1)} - E_g)t} |\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger | \phi \rangle|^2 \mp \theta(-t) e^{i(E_\lambda^{(N-1)} - E_g)t} |\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, t) = \mp i \theta(\pm t) \sum_{\lambda} \left\{ e^{-i(E_\lambda^{(N+1)} - E_g)t} |\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger | \phi \rangle|^2 \mp e^{i(E_\lambda^{(N-1)} - E_g)t} |\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \right\}$$

$$G(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger | \phi \rangle|^2}{\omega - (E_\lambda^{(N+1)} - E_g) + i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega + (E_\lambda^{(N-1)} - E_g) - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger | \phi \rangle|^2}{\omega - (E_\lambda^{(N+1)} - E_g) \pm i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega + (E_\lambda^{(N-1)} - E_g) \pm i\eta} \right\}$$

Fonctions de Green à T=0

$$G(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} + i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} \pm i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} \pm i\eta} \right\}$$

1^{er} terme :

excitation du système par création d'une particule à $\omega > \mu$

2nd terme :

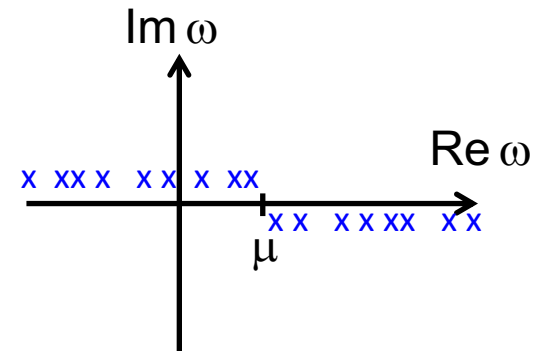
excitation du système par annihilation d'une particule
= création d'un trou à $\omega < \mu$

Fonctions de Green à $T=0$

Propriétés :

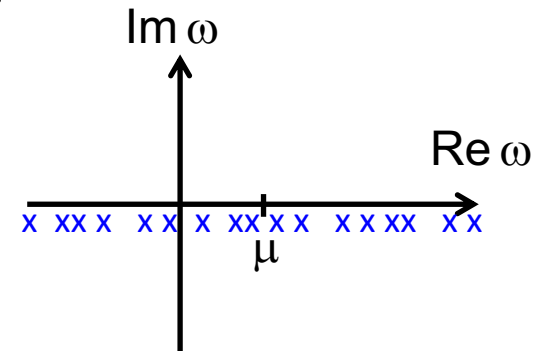
- Fonction de Green ordonnée en temps :

- pôles en dessous de l'axe réelle pour $\omega > \mu$
- pôles au dessus de l'axe réelle pour $\omega < \mu$



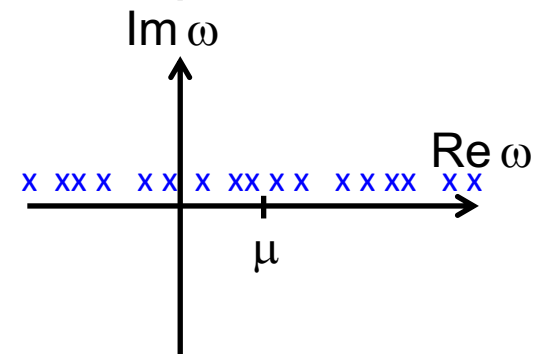
- Fonction de Green retardée :

- tous les pôles en dessous de l'axe réelle



- Fonction de Green avancée :

- tous les pôles au dessus de l'axe réelle



Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

$$G(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} + i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} - i\eta} \right\}$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{|\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)} \pm i\eta} \mp \frac{|\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2}{\omega - \mu + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)} \pm i\eta} \right\}$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \right\}$$

avec $J_+(\vec{k}, \omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)})$

$$J_-(\vec{k}, \omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)})$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

$$J_+(\vec{k}, \omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N+1)} | \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' - \epsilon_{\lambda}^{(N+1)})$$
$$J_-(\vec{k}, \omega') = 2\pi \sum_{\lambda} |\langle \lambda^{(N-1)} | \hat{a}_{\vec{k}} | \phi \rangle|^2 \delta(\omega' + \epsilon_{\lambda}^{(N-1)})$$

à noter ...

$$J_+(\vec{k}, \omega' < 0) = 0$$
$$J_-(\vec{k}, \omega' > 0) = 0$$

Parties réelle et imaginaire des fonctions de Green :

$$\frac{1}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} = P \frac{1}{\omega - \mu - \omega'} \mp i\pi \delta(\omega - \mu - \omega')$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

$$G(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} \right\}$$

$$\frac{1}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} = P \frac{1}{\omega - \mu - \omega'} \mp i\pi \delta(\omega - \mu - \omega')$$

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega') \mp J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'}$$

$$\Im G(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) \mp \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) = \begin{cases} -\frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) & \omega - \mu > 0 \\ \mp \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) & \omega - \mu < 0 \end{cases}$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \mp \left(\frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) \mp \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) \right) = \begin{cases} \mp \frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) & \omega - \mu > 0 \\ \mp(\mp) \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) & \omega - \mu < 0 \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés :
$$G(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' + i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' - i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega') \mp J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta}$$

$$\frac{1}{\omega - \mu - \omega' \pm i\eta} = P \frac{1}{\omega - \mu - \omega'} \mp i\pi \delta(\omega - \mu - \omega')$$

Liens entre les différentes fonctions de Green :

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega') \mp J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'}$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} \mp \frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) = \pm \Im G(\vec{k}, \omega) & \omega > \mu \\ \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) = \mp \Im G(\vec{k}, \omega) & \omega < \mu \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Liens entre parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}
 \Re G(\vec{k}, \omega) &= P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \right\} \\
 &= P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \mp P \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \\
 &= P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{-2\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu)}{\omega - \mu - \omega'} \mp P \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\mp 2\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu)}{\omega - \mu - \omega'} \\
 &= -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu) \text{sign}(\omega')}{\omega - \mu - \omega'} = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega') \text{sign}(\omega' - \mu)}{\omega - \omega'}
 \end{aligned}$$

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = \Re G^{\text{R/A}}(\vec{k}, \omega) = P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega') \mp J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'}$$

$$\Im G^{\text{R/A}}(\vec{k}, \omega) = \begin{cases} \mp \frac{1}{2} J_+(\vec{k}, \omega - \mu) = \pm \Im G(\vec{k}, \omega) & \omega > \mu \\ \mp (\mp) \frac{1}{2} J_-(\vec{k}, \omega - \mu) = \mp \Im G(\vec{k}, \omega) & \omega < \mu \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Liens entre parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}
 \Re G(\vec{k}, \omega) &= P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \mp \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \right\} \\
 &= P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \mp P \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_-(\vec{k}, \omega')}{\omega - \mu - \omega'} \\
 &= P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{-2\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu)}{\omega - \mu - \omega'} \mp P \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\mp 2\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu)}{\omega - \mu - \omega'} \\
 &= -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega' + \mu) \text{sign}(\omega')}{\omega - \mu - \omega'} = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega') \text{sign}(\omega' - \mu)}{\omega - \omega'}
 \end{aligned}$$

Relation de Kramers-Kronig:

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega') \text{sign}(\omega' - \mu)}{\omega - \omega'}$$

Fonctions de Green à T=0

Résumé :

- liens entre les différentes fonctions de Green

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = \Re G^{R/A}(\vec{k}, \omega)$$

$$\Im G^{R/A}(\vec{k}, \omega) = \pm \Im G(\vec{k}, \omega) \text{sign}(\omega - \mu)$$

- liens entre parties réelle et imaginaire

$$\Re G(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} P \int d\omega' \frac{\Im G(\vec{k}, \omega') \text{sign}(\omega' - \mu)}{\omega - \omega'}$$

$\omega > \mu$: excitation du système par création d'une particule

$\omega < \mu$: excitation du système par annihilation d'une particule
= création d'un trou