<u>**RAPPEL :**</u> Fonctions de Green à T=0

Fonction de Green ordonnée en temps :

$$G_{\alpha\beta}(t-t') = -i\langle\phi|T\hat{\psi}_\alpha(t)\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')|\phi\rangle$$

Fonction de Green retardée :

$$G^R_{\alpha\beta}(t-t') = -i\theta(t-t')\langle\phi|[\hat{\psi}_\alpha(t),\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')]_\mp|\phi\rangle$$

Fonction de Green avancée :

$$G^A_{\alpha\beta}(t-t') = i\theta(t'-t)\langle\phi|[\hat{\psi}_\alpha(t),\hat{\psi}^\dagger_\beta(t')]_\mp|\phi\rangle$$

Invariance par translation :

conservation de la quantité de mouvement

$$G_{\alpha\beta}(t-t') \to G_{\vec{k}\vec{k}'}(t-t') = G(\vec{k},t-t')\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Fonctions de Green à T=0

Représentation spectrale :

$H^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle = E_\lambda^{(N)}|\lambda^{(N)}\rangle$ – base complète de l'espace de Hilbert à N particules

$$G(\vec{k},t) = -i\sum_\lambda \left\{\theta(t)e^{-i(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \mp \theta(-t)e^{i(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2\right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},t) = \mp i\theta(\pm t)\sum_\lambda \left\{e^{-i(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \mp e^{i(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)t}|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2\right\}$$

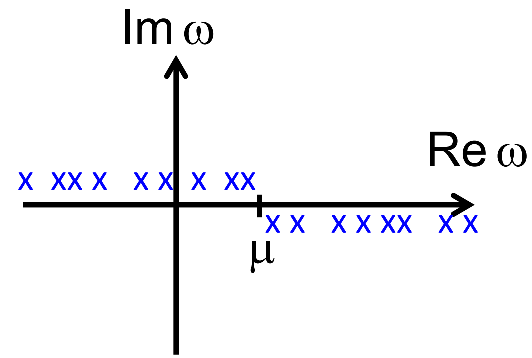
$$G(\vec{k},\omega) = \sum_\lambda \left\{\frac{|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega-(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)+i\eta} \mp \frac{|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega+(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)-i\eta}|\right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \sum_\lambda \left\{\frac{|\langle\lambda^{(N+1)}|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega-(E_\lambda^{(N+1)}-E_g)\pm i\eta} \mp \frac{|\langle\lambda^{(N-1)}|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2}{\omega+(E_\lambda^{(N-1)}-E_g)\pm i\eta}|\right\}$$

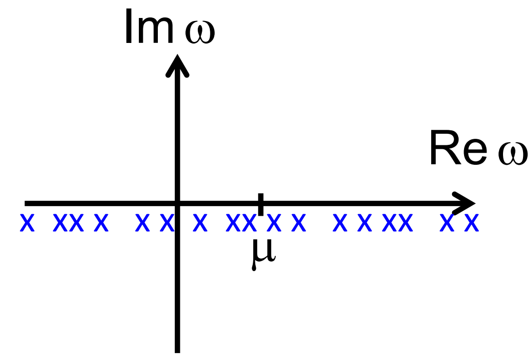
Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

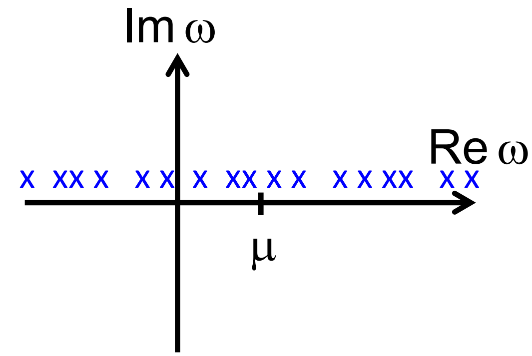
- Fonction de Green ordonnée en temps :
  - pôles en dessous de l'axe réelle pour $\omega > \mu$
  - pôles au dessus de l'axe réelle pour $\omega < \mu$



- Fonction de Green retardée :
  - tous les pôles en dessous de l'axe réelle



- Fonction de Green avancée :
  - tous les pôles au dessus de l'axe réelle



Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

- partie réelle : $\Re[G(\vec{k},\omega)] = \Re[G^R(\vec{k},\omega)] = \Re[G^A(\vec{k},\omega)]$

- partie imaginaire : $\Im[G^R(\vec{k},\omega)] = -\Im[G^A(\vec{k},\omega)]$

$$\Im[G(\vec{k},\omega)] = \begin{cases} \pm\Im[G^{R/A}(\vec{k},\omega)] & \omega > \mu \\ \mp\Im[G^{R/A}(\vec{k},\omega)] & \omega < \mu \end{cases}$$

Fonctions de Green à T=0

Propriétés :

$$G(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ \frac{J_+(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'+i\eta} \mp \frac{J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega'-i\eta} \right\}$$

$$G^{R/A}(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{J_+(\vec{k},\omega') \mp J_-(\vec{k},\omega')}{\omega-\mu-\omega' \pm i\eta}$$

avec $J_+(\vec{k},\omega) = 2\pi \sum_\lambda |\langle\lambda|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \delta(\omega - \epsilon_\lambda^{(N+1)})$

$$J_-(\vec{k},\omega) = 2\pi \sum_\lambda |\langle\lambda|\hat{a}_{\vec{k}}|\phi\rangle|^2 \delta(\omega + \epsilon_\lambda^{(N-1)})$$

Kramers-Kronig relation :

$$\boxed{\Re[G(\vec{k},\omega)] = -\frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Im[G(\vec{k},\omega')]\mathrm{sign}(\omega'-\mu)}{\omega-\mu-\omega'}}$$