

**EXAMEN FINAL – 1<sup>er</sup> février 2021 (2h)**

---

**Modalités :** Documents & calculatrice autorisés.

**NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :**

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
  - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche ( $\rightarrow$ ).
  - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
  - Les questions marquées par un astérisque (\*) sont des questions supplémentaires.
- 

## 1 Questions courtes. [ $\sim 20\%$ ]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1.  $\rightarrow$  En présence d'interaction, la fonction de Green à 1 particule acquiert une self-énergie. Quelles sont les propriétés de cette self-énergie ? Faire un lien avec la théorie du liquide de Fermi.

**Solution:** (6 points) La self-énergie contient toutes les informations sur les interactions. Elle peut être calculée avec l'aide des diagrammes de Feynman. En général, il s'agit d'une quantité complexe,  $\Sigma = \Sigma_R + i\Sigma_I$ . Le signe de la partie imaginaire est fixé par la causalité. L'inverse de la partie imaginaire correspond à un temps de vie des excitations à 1 particule. Si la partie imaginaire est petite, le temps de vie est long et on peut donc définir des "quasi-particules". La théorie du liquide de Fermi est basée sur l'existence de ces quasi-particules qui permettent une description effective du système à des énergies au voisinage du niveau de Fermi. On s'approchant du niveau de Fermi le temps de vie diverge,  $\tau(\epsilon) \propto (\epsilon - E_F)^{-2}$ . La partie réelle modifie l'énergie des quasi-particules et permet de calculer leur masse effective. En outre, elle donne un poids  $Z < 1$  aux quasi-particules dû à l'existence d'un fond d'excitations particule-trou incohérent.

2.  $\rightarrow$  Expliquer comment obtenir l'approximation semiclassique de l'intégrale de chemin.

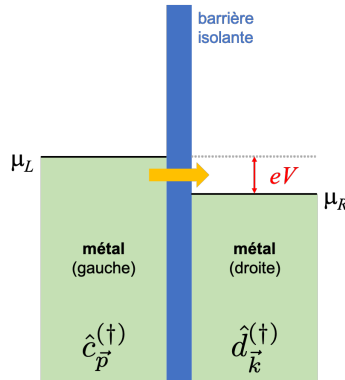
**Solution:** (5 points) L'intégrale de chemin permet de calculer le propagateur  $\langle q_f | e^{-iHt} | q_i \rangle$  en sommant sur toutes les trajectoires possibles de  $q_i$  à  $q_f$  dans l'intervalle de temps  $t$ . Le poids de chaque trajectoire est déterminé par son action classique  $S[q] = \int_0^t dt' L(q(t'), \dot{q}(t'))$  avec  $q(0) = q_i$  et  $q(t) = q_f$ . Notamment

$$\langle q_f | e^{-iHt} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}.$$

La trajectoire classique est obtenue en prenant la limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Dans ce cas, une seule trajectoire contribue au résultat. Il est déterminé par la condition que l'action reste stationnaire,  $\delta S / \delta q = 0$ , ce qui mène aux équations d'Euler-Lagrange. Les contributions de toutes les autres trajectoires se moyennent zéro à cause des facteurs de phase oscillants. L'approximation semi-classique consiste en tenant compte des fluctuations quadratiques autour de la trajectoire classique.

## 2 Courant tunnel entre deux métaux [~ 80%]

Dans cette exercice, nous allons considérer le courant entre deux métaux séparés par une barrière isolante (voir schéma ci-dessous). Les électrons peuvent passer d'un côté à l'autre via l'effet tunnel. Nous négligeons le spin des électrons. La température du système est  $T = 0$ .



L'Hamiltonien qui décrit le système peut être écrit sous la forme

$$H = H_L + H_R + H_T,$$

où  $H_L$  décrit le métal de gauche ( $L = \text{left}$ ),  $H_R$  décrit le métal de droite ( $R = \text{right}$ ) et  $H_T$  décrit le couplage tunnel entre les deux. L'Hamiltonien tunnel  $H_T$  est donné par

$$H_T = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} + h.c..$$

Nous utilisons des notations où  $\hbar = 1$ . Ici  $\hat{c}_{\vec{p}}$  ( $\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$ ) sont des opérateurs d'annihilation (création) d'un électron avec quantité de mouvement  $\vec{p}$  dans le métal de gauche et  $\hat{d}_{\vec{k}}$  ( $\hat{d}_{\vec{k}}^\dagger$ ) sont des opérateurs d'annihilation (création) d'un électron avec quantité de mouvement  $\vec{k}$  dans le métal de droite. Les opérateurs  $\hat{c}_{\vec{p}}^{(\dagger)}$  et  $\hat{d}_{\vec{k}}^{(\dagger)}$  anticommulent.  $t_{\vec{k}\vec{p}}$  est l'amplitude tunnel pour passer d'un état avec quantité de mouvement  $\vec{p}$  à gauche à un état avec quantité de mouvement  $\vec{k}$  à droite.  $h.c.$  dénote le conjugué hermitien des termes écrits.

1. → Donner l'expression complète de  $H_T$ . Quelle est la dimension de  $t_{\vec{k}\vec{p}}$  ?

**Solution:** (2 points)

$$H_T = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \left( t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} + t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}} \right).$$

$t_{\vec{k}\vec{p}}$  est une énergie.

Les électrons de conduction dans chaque métal sont considérés comme des particules libres. Le métal de gauche est au potentiel chimique  $\mu_L$  tandis que le métal de droite est au potentiel chimique  $\mu_R$ . La différence de potentiel chimique est maintenu en appliquant une tension  $eV = \mu_L - \mu_R$ .

2. → Donner les expressions pour  $K_X = H_X - \mu_X N_X$  pour  $X = L, R$ , où  $N_X$  est le nombre d'électrons de conduction dans le métal  $X$ .

**Solution:** (2 points)

$$\begin{aligned} K_L &= \sum_{\vec{p}} \left( \frac{p^2}{2m} - \mu_L \right) \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} \equiv \sum_{\vec{p}} \xi_{\vec{p}}^L \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}}, \\ K_R &= \sum_{\vec{k}} \left( \frac{k^2}{2m} - \mu_R \right) \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}} \equiv \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}^R \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

## 2.1 Système découplé

Dans un premier temps, nous allons considérer le système découplé,  $H_T = 0$ . Dans ce cas, les deux métaux peuvent être considérés individuellement. Nous allons étudier le métal de gauche décrit par  $K_L$  en détail. (Utiliser  $K_L$  plutôt que  $H_L$  correspond à mesurer l'énergie par rapport au potentiel chimique.)

3. → Décrire l'état fondamental du métal de gauche.

**Solution:** (2 points) L'état fondamental correspond à une mer de Fermi : tous les états avec énergie  $E_{\vec{p}} < E_F^L = \mu_L$  sont remplis et tous les états avec énergie  $E_{\vec{p}} > E_F^L = \mu_L$  sont vides.

4. → Déterminer la quantité de mouvement de Fermi  $p_F^L$  en fonction de la masse  $m$  des électrons et du potentiel chimique.

**Solution:** (1 point)

$$E_F^L = \frac{(p_F^L)^2}{2m} = \mu_L.$$

Donc  $p_F^L = \sqrt{2m\mu_L}$ .

5. → Montrer que la densité d'états au niveau de Fermi est donnée par

$$\nu_L = \frac{m^{3/2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_L}{2}}.$$

**Solution:** (4 points) Pour déterminer la densité d'états, on utilise

$$L^3 \sum_{\vec{p}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dp p^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int d\xi_{\vec{p}} \left( \frac{d\xi_{\vec{p}}}{dp} \right)^{-1} p^2 \equiv \int d\xi_{\vec{p}} \nu(\xi_{\vec{p}}).$$

Avec  $d\xi_{\vec{p}}/dp = p/m$  et  $p = \sqrt{2m(\mu_L + \xi_{\vec{p}})}$ , on obtient

$$\nu(\xi_{\vec{p}}) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{d\xi_{\vec{p}}}{dp} \right)^{-1} p^2 = \frac{mp}{2\pi^2} = \frac{m\sqrt{2m(\mu_L + \xi_{\vec{p}})}}{2\pi^2} = \frac{m^{3/2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_L + \xi_{\vec{p}}}{2}}.$$

Au niveau de Fermi ( $\xi_{\vec{p}} = 0$ ), on a donc  $\nu_L = m^{3/2}/\pi^2 \sqrt{\mu_L/2} = mp_F^L/(2\pi^2)$ .

6. Obtenir le commutateur  $[K_L, \hat{c}_{\vec{p}}]$ .

**Solution:** (2 points)

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{\vec{p}'} \xi_{\vec{p}'}^L \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'}, \hat{c}_{\vec{p}} \right] &= \sum_{\vec{p}'} \xi_{\vec{p}'}^L \left( \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'} \hat{c}_{\vec{p}} - \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'} \right) \\ &= \sum_{\vec{p}'} \xi_{\vec{p}'}^L \left( -\hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}'} - \left( \{ \hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \} - \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} \right) \hat{c}_{\vec{p}'} \right) \\ &= - \sum_{\vec{p}'} \xi_{\vec{p}'}^L \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \hat{c}_{\vec{p}'} = -\xi_{\vec{p}}^L \hat{c}_{\vec{p}}. \end{aligned}$$

7. Montrer que la dépendance en temps des opérateurs  $\hat{c}_{\vec{p}}$  en représentation de Heisenberg est donnée par

$$\hat{c}_{\vec{p}}(t) = \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i\xi_{\vec{p}}^L t}$$

avec  $\xi_{\vec{p}}^L = \vec{p}^2/(2m) - \mu_L$ .

**Solution:** (2 points) L'équation de mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt} \hat{c}_{\vec{p}} = i[K_L, \hat{c}_{\vec{p}}] = -i\xi_{\vec{p}}^L \hat{c}_{\vec{p}}.$$

Ce qui mène directement au résultat indiqué.

8. → Donner la dépendance en temps des opérateurs  $\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$  en représentation de Heisenberg.

**Solution:** (1 point)

$$\hat{c}_p^\dagger(t) = \hat{c}_p^\dagger e^{i\xi_p^L t}$$

9. Calculer la fonction de Green

$$\mathcal{G}_L(\vec{p}, t) = -i\langle T\hat{c}_{\vec{p}}(t)\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(0)\rangle.$$

**Solution:** (3 points) Avec la dépendance en temps déterminée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_L(\vec{p}, t) &= -i\langle T\hat{c}_{\vec{p}}(t)\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(0)\rangle \\ &= -ie^{-i\xi_p^L t} \left\{ \theta(t)\langle \hat{c}_{\vec{p}}\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \rangle - \theta(-t)\langle \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger\hat{c}_{\vec{p}} \rangle \right\} \\ &= -ie^{-i\xi_p^L t} \left\{ \theta(t)\theta(|\vec{p}| - p_F^L) - \theta(-t)\theta(p_F^L - |\vec{p}|) \right\}.\end{aligned}$$

10. Prendre la transformée de Fourier pour obtenir  $\mathcal{G}_L(\vec{p}, \omega)$ .

**Solution:** (4 points) Pour pouvoir prendre la transformée de Fourier, il faut introduire un facteur de convergence  $e^{-\eta|t|}$  avec  $\eta \rightarrow 0^+$ . Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_L(\vec{p}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - \eta|t|} \mathcal{G}_L(\vec{p}, t) \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - \eta|t|} e^{-i\xi_p^L t} \left\{ \theta(t)\theta(|\vec{p}| - p_F^L) - \theta(-t)\theta(p_F^L - |\vec{p}|) \right\} \\ &= -i \left\{ \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \eta t - i\xi_p^L t} - \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t + \eta t - i\xi_p^L t} \right\} \\ &= -i \left\{ \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \frac{-1}{i\omega - \eta - i\xi_p^L} - \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \frac{1}{i\omega + \eta - i\xi_p^L} \right\} \\ &= \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \frac{1}{\omega + i\eta - \xi_p^L} + \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \frac{1}{\omega - i\eta - \xi_p^L} \\ &= \frac{1}{\omega - \xi_p^L + i\eta \operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F^L)}.\end{aligned}$$

11. → Faire un schéma pour indiquer la position des pôles de  $\mathcal{G}_L(\vec{p}, \omega)$  dans le plan complexe.

**Solution:** (2 points) Pour  $|\vec{p}| > p_F^L$  ( $\xi_p^L > 0$ ) les pôles sont en dessous de l'axe réelle et pour  $|\vec{p}| < p_F^L$  ( $\xi_p^L < 0$ ) les pôles sont au dessus de l'axe réelle.

Les calculs pour le métal de droite sont analogues.

## 2.2 Courant et réponse linéaire

Nous considérons maintenant le système complet décrit par  $H$ . Le courant tunnel peut être exprimé comme le taux de changement du nombre  $N_L$  d'électrons de conduction dans le métal de gauche,

$$I(t) = -e \langle \dot{N}_L(t) \rangle.$$

12. → Argumenter pourquoi  $[H, N_L] = [H_T, N_L]$ .

**Solution:** (1 point)  $N_L$  commute avec  $H_L$  et  $H_R$ . Donc  $[H, N_L] = [H_T, N_L]$ .

13. → Démontrer

$$\dot{N}_L = i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \left( t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} - t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}} \right).$$

**Solution:** (4 points) L'équation du mouvement est donnée par  $\dot{N}_L = i[H, N_L]$ . Avec le résultat de la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_L &= i[H_T, N_L] = i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{p}'} [t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} + t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'}] \\ &= i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{p}'} \left( t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'}] + t_{\vec{k}\vec{p}}^* [\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}'}] \hat{d}_{\vec{k}} \right) \\ &= i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{p}'} \left( t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} - t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}} \right). \end{aligned}$$

Pour évaluer  $\langle \dot{N}_L(t) \rangle$ , nous allons utiliser la représentation d'interaction avec  $H_0 = H_L + H_R$  et  $V = H_T$ .

14. → Démontrer l'expression suivante en réponse linéaire :

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = -i \int_{-\infty}^t dt' \langle [\dot{N}_L^{(I)}(t), H_T^{(I)}(t')] \rangle_0 + \mathcal{O}(V^2).$$

**Solution:** (5 points) Les "interactions" apparaissent dans la dépendance en temps de  $N_L(t)$  sous la forme

$$\dot{N}_L(t) = U^\dagger(t) \dot{N}_L^{(I)} U(t) \quad \text{avec} \quad U(t) = T \exp[-i \int_{-\infty}^t dt' H_T^{(I)}(t')].$$

Un développement jusqu'au premier ordre donne

$$\begin{aligned} \dot{N}_L(t) &= \dot{N}_L^{(I)}(t) + i \int_{-\infty}^t dt' H_T^{(I)}(t') \dot{N}_L^{(I)}(t) - i \dot{N}_L^{(I)}(t) \int_{-\infty}^t dt' H_T^{(I)}(t') + \mathcal{O}(V^2) \\ &= \dot{N}_L^{(I)}(t) - i \int_{-\infty}^t dt' [\dot{N}_L^{(I)}(t), H_T^{(I)}(t')] + \mathcal{O}(V^2). \end{aligned}$$

La moyenne  $\langle \dot{N}_L^{(I)}(t) \rangle_0$  est nulle parce que  $H_0$  conserve le nombre de particules dans le métal de gauche. Donc

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = -i \int_{-\infty}^t dt' \langle [\dot{N}_L^{(I)}(t), H_T^{(I)}(t')] \rangle_0 + \mathcal{O}(V^2).$$

15. → Expliquer pourquoi, en représentation d'interaction, on peut écrire

$$\hat{X}(t) = e^{iK_0 t} e^{i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{X} e^{-i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} e^{-iK_0 t}$$

avec  $K_0 = K_L + K_R$ .

**Solution:** (2 points) La dépendance en temps est donnée par

$$\hat{X}(t) = e^{iH_0 t} \hat{X} e^{-iH_0 t} = e^{iK_0 t + i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{X} e^{-iK_0 t - i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t}.$$

Comme  $N_L$  et  $N_R$  commutent avec  $K_0$ , on obtient la formule indiquée.

16. → Démontrer

$$e^{i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} = e^{-ieVt} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}}.$$

**Solution:** (3 points)

$$\begin{aligned} e^{i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} &= e^{i\mu_R N_R t} \hat{d}_k^\dagger e^{-i\mu_R N_R t} e^{i\mu_L N_L t} \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i\mu_L N_L t} \\ &= e^{i\mu_R t} \hat{d}_k^\dagger e^{-i\mu_L t} \hat{c}_{\vec{p}} = e^{-ieVt} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}}. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats obtenues jusqu'ici, on peut écrire

$$\begin{aligned} I(t) &= e \int_{-\infty}^t dt' \left\langle \left[ \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \left( t_{\vec{k}\vec{p}} e^{-ieVt'} \hat{d}_k^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}}(t') - t_{\vec{k}\vec{p}}^* e^{ieVt'} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(t') \hat{d}_k(t') \right), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} \left( t_{\vec{k}'\vec{p}'} e^{-ieVt'} \hat{d}_{k'}^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}'}(t') + t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* e^{ieVt'} \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(t') \hat{d}_{k'}(t') \right) \right] \right\rangle_0. \end{aligned}$$

17. → Expliquer comment cette formule peut être réduite à

$$\begin{aligned} I(t) &= e \int_{-\infty}^t dt' e^{ieV(t'-t)} \left\langle \left[ \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_k^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}}(t'), \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(t') \hat{d}_{k'}(t') \right] \right\rangle_0 \\ &\quad - e \int_{-\infty}^t dt' e^{-ieV(t'-t)} \left\langle \left[ \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(t') \hat{d}_k(t'), \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}'\vec{p}'} \hat{d}_{k'}^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}'}(t') \right] \right\rangle_0. \end{aligned}$$

**Solution:** (1 point) Les termes qui ne contiennent pas le même nombre d'opérateurs de création et d'annihilation pour chacun des deux métaux sont nuls en moyenne.

On peut montrer que l'intégrand dépend de  $t - t'$  seulement. Par conséquent, le courant ne dépend pas du temps. Avec un changement de variable, il peut être écrit sous la forme

$$I = e \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} \left\langle [\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0)] \right\rangle_0.$$

avec

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t).$$

18. → Définir des fonctions de corrélation retardées  $U_R(t)$  et avancées  $U_A(t)$  tel que

$$I(t) = ie \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} U_R(t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} U_A(t) \right\}.$$

**Solution:** (3 points) On peut écrire

$$I = ie \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} (-i)\theta(t) \left\langle [\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0)] \right\rangle_0 - \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} i\theta(-t) \left\langle [\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0)] \right\rangle_0 \right).$$

Donc

$$U_R(t) = -i\theta(t) \left\langle [\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0)] \right\rangle_0, \quad U_A(t) = i\theta(-t) \left\langle [\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0)] \right\rangle_0.$$

En utilisant les propriétés des fonctions retardées et avancées, on conclut que

$$I = -2e\Im [U_R(-eV)].$$

### 2.3 La fonction de corrélation

La fonction de corrélation ordonnée en temps correspondante est donnée par

$$\mathcal{U}(t) = -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}\vec{p}} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \langle T \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t) \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(0) \hat{d}_{\vec{k}'}(0) \rangle.$$

19. → Utiliser le théorème de Wick et les propriétés des fonctions de Green des deux métaux pour obtenir

$$\mathcal{U}(t) = -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 G_L(\vec{p}, t) G_R(\vec{k}, -t).$$



**Solution:** (4 points)

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(t) &= -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}\vec{p}} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \langle T \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t) \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(0) \hat{d}_{\vec{k}'}(0) \rangle \\
&= i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}\vec{p}} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \langle T \hat{c}_{\vec{p}}(t) \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(0) \rangle \langle T \hat{d}_{\vec{k}'}(0) \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger(t) \rangle \\
&= -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}\vec{p}} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* G_L(\vec{p}, t) \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} G_R(\vec{k}, -t) \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \\
&= -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 G_L(\vec{p}, t) G_R(\vec{k}, -t).
\end{aligned}$$

En utilisant les expressions pour les fonctions de Green, on trouve

$$\mathcal{U}(t) = i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 e^{-i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)t} \left\{ \theta(t) \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) + \theta(-t) \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right\}.$$

20. → Démontrer

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(\omega) &= \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) - i\eta} \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) + i\eta} \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right\}.
\end{aligned}$$

**Solution:** (3 points) La transformée de Fourier de  $\mathcal{U}(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |\eta|t} \mathcal{U}(t) \\
&= i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |\eta|t} e^{-i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)t} \theta(t) \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - |\eta|t} e^{-i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)t} \theta(-t) \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right\} \\
&= i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left\{ \frac{-1}{i\omega - \eta - i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)} \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{i\omega + \eta - i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)} \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right\} \\
&= - \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) + i\eta} \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) - i\eta} \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right\},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat indiqué.

21. → Utiliser les relations entre les fonctions de Green ordonnées en temps et les fonctions de Green retardées / avancées pour déterminer  $U_R(\omega)$ .

**Solution:** (2 points) Avec  $U_R(\omega) = \mathcal{U}(\omega + i\delta)$ , on obtient

$$\mathcal{U}(\omega) = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) + i\delta} \left\{ \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right\}.$$

## 2.4 Le courant tunnel

Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour calculer le courant tunnel à travers la barrière isolante.

22. Utiliser les résultats ci-dessus et  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Im[1/(x + i\delta)] = -\pi\delta(x)$  pour démontrer

$$I = 2\pi e \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left[ \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right] \delta(eV - \xi_{\vec{k}}^R + \xi_{\vec{p}}^L).$$

**Solution:** (3 points) Selon l'énoncé, le courant est donné par  $I = -2e\Im[U_R(-eV)]$ . Avec les résultats des questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} I &= -2e\Im[\mathcal{U}(-eV + i\delta)] \\ &= -2e\Im\left[ \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \frac{1}{-eV - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) + i\delta} \left\{ \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right\} \right] \\ &= 2\pi e \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left[ \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right] \delta(eV - \xi_{\vec{k}}^R + \xi_{\vec{p}}^L). \end{aligned}$$

23. → Par la suite, on supposera  $t_{\vec{k}\vec{p}} \equiv t$ . Transformer les sommes sur  $\vec{p}$  et  $\vec{k}$  dans des intégrales sur  $\xi_{\vec{p}}^L$  et  $\xi_{\vec{k}}^R$ .

**Solution:** (2 points)

$$I = 2\pi e |t|^2 \frac{1}{L^6} \int_{-\mu_L}^{\infty} d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \int_{-\mu_R}^{\infty} d\xi_R \nu(\mu_R + \xi_R) [\theta(-\xi_L) \theta(\xi_R) - \theta(\xi_L) \theta(-\xi_R)] \delta(eV - \xi_R + \xi_L)$$

24. Utiliser la distribution de Dirac pour évaluer l'intégrale sur  $\xi_R$  et démontrer que, pour  $V > 0$ ,

$$I(t) = 2\pi e |t|^2 \frac{1}{L^6} \int_{-eV}^0 d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \nu(\mu_R + \xi_L + eV)$$

**Solution:** (4 points)

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi e|t|^2 \frac{1}{L^6} \int_{-\mu_L}^{\infty} d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \nu(\mu_R + \xi_L + eV) \\
 &\quad [\theta(-\xi_L)\theta(\xi_L + eV) - \theta(\xi_L)\theta(-\xi_L - eV)] \\
 &= 2\pi e|t|^2 \frac{1}{L^6} \left[ \int_{-eV}^0 d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \nu(\mu_R + \xi_L + eV) \theta(V) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{-eV} d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \nu(\mu_R + \xi_L + eV) \theta(-V) \right].
 \end{aligned}$$

Pour  $V > 0$  seulement le premier terme est non-nul ce qui donne le résultat indiqué.

25. → Approximer les densités d'états par leur valeurs au niveau de Fermi et trouver le résultat final pour le courant.

**Solution:** (2 points) En prenant  $\nu(\mu_L + \xi_L) \approx \nu(\mu_L) = \nu_L$  et  $\nu(\mu_R + \xi_L + eV) \approx \nu(\mu_R) = \nu_R$ , on obtient

$$I = 2\pi e|t|^2 \nu_L \nu_R \frac{1}{L^6} \int_{-eV}^0 d\xi_L = 2\pi e^2 V |t|^2 \frac{1}{L^6} \nu_L \nu_R.$$

26. \* Discuter le résultat.

**Solution:** (+ 3 points) Seulement les électrons avec énergies entre  $\mu_R$  et  $\mu_L$  participent au courant. Le courant est donc proportionnel à  $\mu_L - \mu_R = eV$ . Le courant est aussi proportionnel à  $|t|^2$  ce qui correspond à une probabilité de passer d'un côté à l'autre par effet tunnel. Finalement les densités d'états déterminent le nombre d'états qui contribuent au courant.