

EXAMEN FINAL – 1^{er} février 2021 (2h)

Modalités : Documents & calculatrice autorisés.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
 - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche (\rightarrow).
 - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
 - Les questions marquées par un astérisque (*) sont des questions supplémentaires.
-

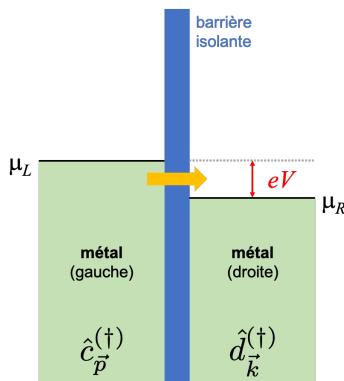
1 Questions courtes. [$\sim 20\%$]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1. \rightarrow En présence d'interaction, la fonction de Green à 1 particule acquiert une self-énergie. Quelles sont les propriétés de cette self-énergie ? Faire un lien avec la théorie du liquide de Fermi.
2. \rightarrow Expliquer comment obtenir l'approximation semiclassique de l'intégrale de chemin.

2 Courant tunnel entre deux métaux [$\sim 80\%$]

Dans cette exercice, nous allons considérer le courant entre deux métaux séparés par une barrière isolante (voir schéma ci-dessous). Les électrons peuvent passer d'un côté à l'autre via l'effet tunnel. Nous négligeons le spin des électrons. La température du système est $T = 0$.



L'Hamiltonien qui décrit le système peut être écrit sous la forme

$$H = H_L + H_R + H_T,$$

où H_L décrit le métal de gauche ($L = \text{left}$), H_R décrit le métal de droite ($R = \text{right}$) et H_T décrit le couplage tunnel entre les deux. L'Hamiltonien tunnel H_T est donné par

$$H_T = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} + h.c..$$

Nous utilisons des notations où $\hbar = 1$. Ici $\hat{c}_{\vec{p}}$ ($\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$) sont des opérateurs d'annihilation (création) d'un électron avec quantité de mouvement \vec{p} dans le métal de gauche et $\hat{d}_{\vec{k}}$ ($\hat{d}_{\vec{k}}^\dagger$) sont des opérateurs d'annihilation (création) d'un électron avec quantité de mouvement \vec{k} dans le métal de droite. Les opérateurs $\hat{c}_{\vec{p}}^{(\dagger)}$ et $\hat{d}_{\vec{k}}^{(\dagger)}$ anticommulent. $t_{\vec{k}\vec{p}}$ est l'amplitude tunnel pour passer d'un état avec quantité de mouvement \vec{p} à gauche à un état avec quantité de mouvement \vec{k} à droite. $h.c.$ dénote le conjugué hermitien des termes écrits.

1. \rightarrow Donner l'expression complète de H_T . Quelle est la dimension de $t_{\vec{k}\vec{p}}$?

Les électrons de conduction dans chaque métal sont considérés comme des particules libres. Le métal de gauche est au potentiel chimique μ_L tandis que le métal de droite est au potentiel chimique μ_R . La différence de potentiel chimique est maintenu en appliquant une tension $eV = \mu_L - \mu_R$.

2. \rightarrow Donner les expressions pour $K_X = H_X - \mu_X N_X$ pour $X = L, R$, où N_X est le nombre d'électrons de conduction dans le métal X .

2.1 Système découplé

Dans un premier temps, nous allons considérer le système découplé, $H_T = 0$. Dans ce cas, les deux métaux peuvent être considérés individuellement. Nous allons étudier le métal de gauche décrit par K_L en détail. (Utiliser K_L plutôt que H_L correspond à mesurer l'énergie par rapport au potentiel chimique.)

3. \rightarrow Décrire l'état fondamental du métal de gauche.

4. → Déterminer la quantité de mouvement de Fermi p_F^L en fonction de la masse m des électrons et du potentiel chimique.
5. → Montrer que la densité d'états au niveau de Fermi est donnée par

$$\nu_L = \frac{m^{3/2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_L}{2}}.$$

6. Obtenir le commutateur $[K_L, \hat{c}_{\vec{p}}]$.
7. Montrer que la dépendance en temps des opérateurs $\hat{c}_{\vec{p}}$ en représentation de Heisenberg est donnée par

$$\hat{c}_{\vec{p}}(t) = \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i\xi_{\vec{p}}^L t}$$

avec $\xi_{\vec{p}}^L = \vec{p}^2/(2m) - \mu_L$.

8. → Donner la dépendance en temps des opérateurs $\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$ en représentation de Heisenberg.
9. Calculer la fonction de Green

$$\mathcal{G}_L(\vec{p}, t) = -i \langle T \hat{c}_{\vec{p}}(t) \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(0) \rangle.$$

10. Prendre la transformée de Fourier pour obtenir $\mathcal{G}_L(\vec{p}, \omega)$.
 11. → Faire un schéma pour indiquer la position des pôles de $\mathcal{G}_L(\vec{p}, \omega)$ dans le plan complexe.
- Les calculs pour le métal de droite sont analogues.

2.2 Courant et réponse linéaire

Nous considérons maintenant le système complet décrit par H . Le courant tunnel peut être exprimé comme le taux de changement du nombre N_L d'électrons de conduction dans le métal de gauche,

$$I(t) = -e \langle \dot{N}_L(t) \rangle.$$

12. → Argumenter pourquoi $[H, N_L] = [H_T, N_L]$.

13. → Démontrer

$$\dot{N}_L = i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \left(t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_{\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} - t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{d}_{\vec{k}} \right).$$

Pour évaluer $\langle \dot{N}_L(t) \rangle$, nous allons utiliser la représentation d'interaction avec $H_0 = H_L + H_R$ et $V = H_T$.

14. → Démontrer l'expression suivante en réponse linéaire :

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = -i \int_{-\infty}^t dt' \langle [\dot{N}_L^{(I)}(t), H_T^{(I)}(t')] \rangle_0 + \mathcal{O}(V^2).$$

15. → Expliquer pourquoi, en représentation d'interaction, on peut écrire

$$\hat{X}(t) = e^{iK_0 t} e^{i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{X} e^{-i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} e^{-iK_0 t}$$

avec $K_0 = K_L + K_R$.

16. → Démontrer

$$e^{i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i(\mu_L N_L + \mu_R N_R)t} = e^{-ieVt} \hat{d}_k^\dagger \hat{c}_{\vec{p}}.$$

En utilisant les résultats obtenues jusqu'ici, on peut écrire

$$I(t) = e \int_{-\infty}^t dt' \left\langle \left[\sum_{\vec{k}, \vec{p}} \left(t_{\vec{k}\vec{p}} e^{-ieVt} \hat{d}_k^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t) - t_{\vec{k}\vec{p}}^* e^{ieVt} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(t) \hat{d}_k(t) \right), \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} \left(t_{\vec{k}'\vec{p}'} e^{-ieVt'} \hat{d}_{k'}^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}'}(t') + t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* e^{ieVt'} \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(t') \hat{d}_{k'}(t') \right) \right] \right\rangle_0.$$

17. → Expliquer comment cette formule peut être réduite à

$$I(t) = e \int_{-\infty}^t dt' e^{ieV(t'-t)} \left\langle \left[\sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_k^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t), \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(t') \hat{d}_{k'}(t') \right] \right\rangle_0 \\ - e \int_{-\infty}^t dt' e^{-ieV(t'-t)} \left\langle \left[\sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}}^* \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger(t) \hat{d}_k(t), \sum_{\vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}'\vec{p}'} \hat{d}_{k'}^\dagger(t') \hat{c}_{\vec{p}'}(t') \right] \right\rangle_0.$$

On peut montrer que l'intégrand dépend de $t - t'$ seulement. Par conséquent, le courant ne dépend pas du temps. Avec un changement de variable, il peut être écrit sous la forme

$$I = e \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} \left\langle \left[\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(0) \right] \right\rangle_0.$$

avec

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} t_{\vec{k}\vec{p}} \hat{d}_k^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t).$$

18. → Définir des fonctions de corrélation retardées $U_R(t)$ et avancées $U_A(t)$ tel que

$$I(t) = ie \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} U_R(t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ieVt} U_A(t) \right\}.$$

En utilisant les propriétés des fonctions retardées et avancées, on conclut que

$$I = -2e\Im [U_R(-eV)].$$

2.3 La fonction de corrélation

La fonction de corrélation ordonnée en temps correspondante est donnée par

$$\mathcal{U}(t) = -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}; \vec{k}', \vec{p}'} t_{\vec{k}\vec{p}} t_{\vec{k}'\vec{p}'}^* \langle T \hat{d}_k^\dagger(t) \hat{c}_{\vec{p}}(t) \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger(0) \hat{d}_{k'}(0) \rangle.$$

19. → Utiliser le théorème de Wick et les propriétés des fonctions de Green des deux métaux pour obtenir

$$\mathcal{U}(t) = -i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 G_L(\vec{p}, t) G_R(\vec{k}, -t).$$

En utilisant les expressions pour les fonctions de Green, on trouve

$$\mathcal{U}(t) = i \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 e^{-i(\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R)t} \left\{ \theta(t) \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) + \theta(-t) \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) \right\}.$$

20. → Démontrer

$$\mathcal{U}(\omega) = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) - i\eta} \theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \frac{1}{\omega - (\xi_{\vec{p}}^L - \xi_{\vec{k}}^R) + i\eta} \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right\}.$$

21. → Utiliser les relations entre les fonctions de Green ordonnées en temps et les fonctions de Green retardées / avancées pour déterminer $U_R(\omega)$.

2.4 Le courant tunnel

Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour calculer le courant tunnel à travers la barrière isolante.

22. Utiliser les résultats ci-dessus et $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Im[1/(x + i\delta)] = -\pi\delta(x)$ pour démontrer

$$I = 2\pi e \sum_{\vec{k}, \vec{p}} |t_{\vec{k}\vec{p}}|^2 \left[\theta(p_F^L - |\vec{p}|) \theta(|\vec{k}| - k_F^R) - \theta(|\vec{p}| - p_F^L) \theta(k_F^R - |\vec{k}|) \right] \delta(eV - \xi_{\vec{k}}^R + \xi_{\vec{p}}^L).$$

23. → Par la suite, on supposera $t_{\vec{k}\vec{p}} \equiv t$. Transformer les sommes sur \vec{p} et \vec{k} dans des intégrales sur $\xi_{\vec{p}}^L$ et $\xi_{\vec{k}}^R$.

24. Utiliser la distribution de Dirac pour évaluer l'intégrale sur ξ_R et démontrer que, pour $V > 0$,

$$I(t) = 2\pi e |t|^2 \frac{1}{L^6} \int_{-eV}^0 d\xi_L \nu(\mu_L + \xi_L) \nu(\mu_R + \xi_L + eV)$$

25. → Approximer les densités d'états par leur valeurs au niveau de Fermi et trouver le résultat final pour le courant.

26. * Discuter le résultat.