

EXAMEN FINAL – 3 février 2020 (2h)

Modalités : Documents & calculatrice autorisés.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
 - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche (\rightarrow).
 - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
 - Les questions marquées par un astérisque (*) sont des questions supplémentaires.
-

1 Questions courtes. [$\sim 20\% = 13$ points]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1. \rightarrow Qu'est-ce le théorème de Wick et sous quelles conditions il s'applique ?

Solution: (2 points) Le théorème de Wick permet d'exprimer la valeur moyenne d'un produit de $2n$ opérateurs de création / annihilation par des produits de valeurs moyennes de 2 opérateurs de création / annihilation. Il s'applique aux systèmes sans interactions qui possèdent un Hamiltonien quadratique. Il faut sommer sur toutes les contractions possibles des opérateurs en tenant compte des signes.

2. \rightarrow Qu'est qui détermine les valeurs de fréquences de Matsubara bosoniques ($\omega_n = 2\pi n/\beta$) et fermioniques ($\omega_n = 2\pi(n + 1/2)/\beta$) ?

Solution: (3 points) Les valeurs des fréquences de Matsubara sont déterminée par la périodicité de la fonction de Green en temps imaginaire. On peut développer la fonction de Green en série de Fourier complexe sur l'intervalle $[-\beta, \beta]$ en utilisant des fréquences $n\pi/\beta$. Pour les bosons, $\mathcal{G}(\tau)$ est paire et seulement les composants $2n\pi/\beta$ sont non-nulles. Pour les fermions, $\mathcal{G}(\tau)$ est impaire et seulement les composants $(2n + 1)\pi/\beta$ sont non-nulles.

3. → Résumer les étapes principales de la construction de l'intégrale de chemin.

Solution: (5 points) L'intégrale de chemin permet de calculer le propagateur

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle.$$

D'abord on divise l'intervalle $[t_i, t_f]$ dans N intervalles de largeur $\Delta t = (t_f - t_i)/N$ tel que

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} = \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} \right)^N.$$

Puis on utilise que dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{T} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} \Delta t},$$

où $\hat{T} = \hat{T}(\hat{p})$ est l'énergie cinétique et $\hat{V} = \hat{V}(\hat{q})$ est l'énergie potentielle. Par la suite, on s sert du fait que les états propres de \hat{T} et \hat{V} sont connus pour insérer une résolution de l'unité

$$\int dq_n \int dp_n |q_n\rangle \langle q_n| |p_n\rangle \langle p_n| = 1$$

à chaque intervalle Δt . Avec

$$\hat{T}|p_n\rangle = \frac{p_n^2}{2m}|p_n\rangle, \quad \hat{V}|q_n\rangle = V(q_n)|q_n\rangle, \quad \langle q_n | p_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p_n q_m},$$

l'expression se réduit à un produit d'intégrales sur toutes les variables q_n, p_n . Comme seulement les trajectoires lisses contribuent au résultat, on peut finalement prendre une limite continue pour obtenir

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right].$$

4. → Expliquer comment on peut obtenir la trajectoire classique d'une particule à partir de l'intégrale de chemin.

Solution: (3 points) L'intégrale de chemin est donnée par

$$\langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right].$$

La limite classique est obtenue pour $\hbar \rightarrow 0$. Dans cette limite seulement la trajectoire correspondant à une action stationnaire $\delta S = 0$ survit - les autres trajectoires se moyennent à zéro à cause des variations de phase associées. L'action stationnaire est obtenu pour la trajectoire qui obéit à l'équation d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\text{cl}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\text{cl}}} = 0.$$

2 Couplage électron-phonon. [$\sim 80\% = 46(+5)$ points]

En cours / TD, nous avons vu les fonctions de Green des électrons et les fonctions Green des phonons. Ici nous allons étudier le couplage entre les électrons et les phonons. Vous pouvez prendre $\hbar = 1$.

2.1 Electrons libres à $T = 0$

- On dénote $a_{\vec{k},s}^\dagger$ et $a_{\vec{k},s}$ les opérateurs de création et d'annihilation d'un électron avec quantité de mouvement \vec{k} et spin $s = \uparrow, \downarrow$. Donner l'Hamiltonien des électrons libres en seconde quantification, en mesurant les énergies par rapport au potentiel chimique $\mu = E_F$. Définir toutes les quantités.

Solution: (2 points) L'Hamiltonien des électrons libres est donné par

$$H_e = \sum_{\vec{k};s} \xi_{\vec{k}} a_{\vec{k},s}^\dagger a_{\vec{k},s}$$

avec $\xi_{\vec{k}} = k^2/(2m) - \mu$.

- La fonction de Green ordonnée en temps des électrons est définie comme

$$G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}(t) = -i \langle T a_{\vec{k},s}(t) a_{\vec{k}',s'}^\dagger(0) \rangle.$$

Définir T et $\langle \dots \rangle$.

Solution: (2 points) T est l'opérateur chronologique :

$$T a_{\vec{k},s}(t) a_{\vec{k}',s'}^\dagger(0) = \theta(t) a_{\vec{k},s}(t) a_{\vec{k}',s'}^\dagger(0) - \theta(-t) a_{\vec{k}',s'}^\dagger(0) a_{\vec{k},s}(t).$$

$\langle \dots \rangle$ est la valeur moyenne dans l'état fondamental. L'état fondamental est la mer de Fermi remplie.

- On peut montrer que $G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}^{(0)}(t)$ des électrons libres est donnée par

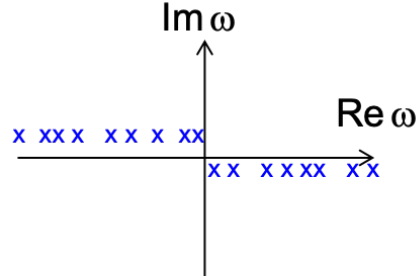
$$G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}^{(0)}(t) = -i \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{s,s'} e^{-i\xi_{\vec{k}} t} \left\{ \theta(t) \theta(|\vec{k}| - k_F) - \theta(-t) \theta(k_F - |\vec{k}|) \right\} \equiv \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{s,s'} G_s^{(0)}(\vec{k}, t).$$

Déterminer la transformée de Fourier, $G_s^{(0)}(\vec{k}, \omega)$.

Solution: (3 points) Pour calculer la transformée de Fourier, il faut introduire un facteur de régularisation $e^{-\eta|t|}$. On obtient

$$\begin{aligned}
G_s^{(0)}(\vec{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t - \eta|t|} G_s^{(0)}(\vec{k}, t) \\
&= -i \left\{ \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \eta t - i\xi_{\vec{k}} t} \theta(|\vec{k}| - k_F) - \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t + \eta t - i\xi_{\vec{k}} t} \theta(k_F - |\vec{k}|) \right\} \\
&= -i \left\{ -\frac{1}{i\omega - \eta - i\xi_{\vec{k}}} \theta(|\vec{k}| - k_F) - \frac{1}{i\omega + \eta - i\xi_{\vec{k}}} \theta(k_F - |\vec{k}|) \right\} \\
&= \frac{1}{\omega - \xi_{\vec{k}} + i\eta \operatorname{sign}(|\vec{k}| - k_F)}.
\end{aligned}$$

4. Faire un schéma indiquant la position des pôles de $G_s^{(0)}(\vec{k}, \omega)$ dans le plan complexe.



Solution: (2 points)

2.2 Phonons libres à $T = 0$

5. → On dénote $b_{\vec{k}}^{\dagger}$ et $b_{\vec{k}}$ les opérateurs de création et d'annihilation d'un phonon avec quantité de mouvement \vec{k} . Donner l'Hamiltonien des phonons libres en seconde quantification. Définir toutes les quantités.

Solution: (2 points) L'Hamiltonien des phonons libres est donné par

$$H_{ph} = \sum_{\vec{k}} \omega_0(\vec{k}) \left(b_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

avec $\omega_0(\vec{k}) = \omega_0(-\vec{k}) > 0$.

6. → La fonction de Green ordonnée en temps des phonons est définie comme

$$D_{\vec{k}, \vec{k}'}(t) = -i \langle T B_{\vec{k}}(t) B_{-\vec{k}'}(0) \rangle.$$

Définir T , $\langle \dots \rangle$ et $B_{\vec{k}}$.

Solution: (2 points) Selon le TD 1, $B_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger$.

T est l'opérateur chronologique :

$$TB_{\vec{k}}(t)B_{-\vec{k}}(0) = \theta(t)B_{\vec{k}}(t)B_{-\vec{k}}(0) + \theta(-t)B_{-\vec{k}}(0)B_{\vec{k}}(t).$$

$\langle \dots \rangle$ est la valeur moyenne dans l'état fondamental. L'état fondamental est le vide.

7. Démontrer que la fonction de Green des phonons libres peut être écrite sous la forme $D_{\vec{k},\vec{k}'}^{(0)}(t) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} D^{(0)}(\vec{k}, t)$ et déterminer $D^{(0)}(\vec{k}, t)$. Détailler les étapes du calcul et définir toutes les quantités.

Solution: (3 points) La dépendance en temps des opérateurs est donnée par

$$b_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_0(\vec{k})t} b_{\vec{k}}, \quad b_{\vec{k}}^\dagger(t) = e^{i\omega_0(\vec{k})t} b_{\vec{k}}^\dagger.$$

En outre,

$$\langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'} \rangle = \langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'}^\dagger \rangle = \langle b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}'} \rangle = 0, \quad \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^\dagger \rangle = \delta_{\vec{k},\vec{k}}.$$

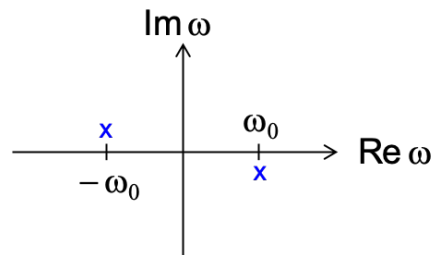
Avec la définition de l'opérateur chronologique donnée dans la question précédente, on obtient le résultat

$$D_{\vec{k},\vec{k}'}^{(0)}(t) = -i\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \left\{ \theta(t) e^{-i\omega_0(\vec{k})t} + \theta(-t) e^{i\omega_0(\vec{k})t} \right\} \equiv \delta_{\vec{k},\vec{k}'} D^{(0)}(\vec{k}, t).$$

8. → La transformée de Fourier est donnée par

$$D^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \frac{2\omega_0(\vec{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\vec{k}) + i\eta}.$$

Faire un schéma indiquant la position des pôles de $D^{(0)}(\vec{k}, \omega)$ dans le plan complexe.



Solution: (2 points)

2.3 Couplage électron-phonon

9. → L'Hamiltonien décrivant le couplage entre électrons et phonons peut s'écrire sous la forme

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, s} g_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}, s}^\dagger a_{\vec{k}, s} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^\dagger).$$

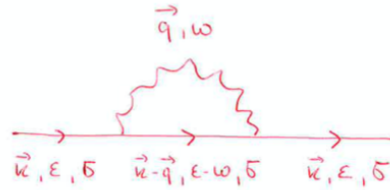
Ici V est le volume du système, $g_{\vec{q}} = g\sqrt{|\vec{q}|}$ une constante de couplage et $\omega_0(\vec{q}) = c_0|\vec{q}|$. Expliquer les processus physiques contenues dans cet Hamiltonien.

Solution: (2 points) L'Hamiltonien de couplage décrit des processus de diffusion des électrons par absorption et émission d'un phonon.

10. → Le couplage électron-phonon modifie la fonction de Green des électrons, $G^{(0)} \rightarrow G$, et la fonction de Green des phonons, $D^{(0)} \rightarrow D$. Quel est l'ordre le plus bas dans la constante de couplage $g_{\vec{q}}$ qui donne des corrections aux fonctions de Green des électrons et la fonction de Green des phonons. Argumenter votre réponse.

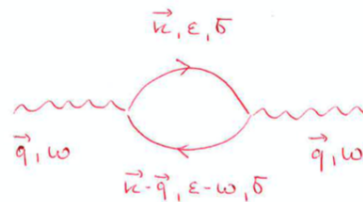
Solution: (2 points) Dans les deux cas l'ordre le plus bas est en $g_{\vec{q}}^2$ parce que $\langle b \rangle = \langle b^\dagger \rangle = 0$.

11. Dessiner le diagramme de Feynmann correspondant à la correction à la fonction de Green des électrons à l'ordre le plus bas en g . Indiquer toutes les quantités de mouvement et énergies / fréquences. La fonction de Green des phonons est représentée par une ligne ondulée.



Solution: (2 points)

12. Dessiner le diagramme de Feynmann correspondant à la correction à la fonction de Green des phonons à l'ordre le plus bas en g . Indiquer toutes les quantités de mouvement et énergies / fréquences.

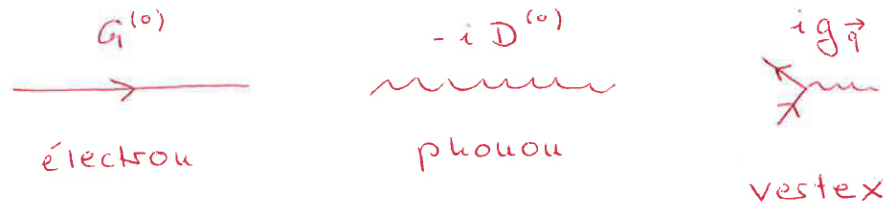


Solution: (2 points)

2.4 Fonction de Green des électrons à $T = 0$

Nous allons étudier la fonction de Green des électrons en présence du couplage électron-phonon à l'aide de diagrammes de Feynmann. Une ligne ondulée est associée avec un facteur $-iD^{(0)}$. Chaque vertex est associé avec un facteur $ig_{\vec{q}}$. Comme nous étudions des électrons avec spin, il

faut sommer sur les spin. Les facteurs $e^{i\omega_i\eta}$ peuvent être omis. Sinon les règles de Feynmann restent les mêmes que vous avez vu en cours.



13. Utiliser les règles de Feynmann pour montrer que la self-énergie des électrons à l'ordre le plus bas en g est donnée par

$$\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon) = i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} g_{\vec{q}}^2 G_s^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, \epsilon - \omega) D^{(0)}(\vec{q}, \omega).$$

Solution: (1 point) La self-énergie contient une ligne fermionique $\rightarrow G^{(0)}$, une ligne bosonique $\rightarrow -iD^{(0)}$ et 2 vertex $\rightarrow (ig_{\vec{q}})^2$. En outre, il faut intégrer sur toutes les quantités de mouvement et énergies internes.

14. \rightarrow Donner une expression pour la fonction de Green des électrons $G_s(\vec{k}, \epsilon)$ en utilisant $G_s^{(0)}(\vec{k}, \epsilon)$ et $\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$.

Solution: (2 points) L'équation de Dyson donne

$$G_s(\vec{k}, \epsilon) = \frac{1}{\left(G_s^{(0)}(\vec{k}, \epsilon)\right)^{-1} - \Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)} = \frac{1}{\epsilon - \xi_{\vec{k}} + i\eta \text{sign}(|\vec{k}| - k_F) - \Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)}.$$

15. \rightarrow Evaluer l'intégrale sur ω dans l'expression pour $\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$.

Solution: (4 points) Il faut évaluer

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega}{2\pi} G_s^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, \epsilon - \omega) D^{(0)}(\vec{q}, \omega) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\epsilon - \omega - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta \text{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}})} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0(\vec{q}) + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_0(\vec{q}) - i\eta} \right). \end{aligned}$$

L'intégrand possède 3 pôles :

$$\omega = \epsilon - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta \text{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}), \quad \omega = \omega_0(\vec{q}) - i\eta, \quad \omega = -\omega_0(\vec{q}) + i\eta.$$

On peut choisir le contour d'intégration tel qu'il n'y a qu'un seul pôle intérieur du contour. Pour cela, il faut fermer le contour dans le plan complexe inférieur pour

$\xi_{\vec{k}-\vec{q}} > 0$ et dans le plan complexe supérieur pour $\xi_{\vec{k}-\vec{q}} < 0$. Avec le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega}{2\pi} G_s^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, \epsilon - \omega) D^{(0)}(\vec{q}, \omega) \\ &= i \left\{ -\theta(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon - (\omega_0(\vec{q}) - i\eta) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta \text{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}})} \right. \\ & \quad \left. - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon - (-\omega_0(\vec{q}) + i\eta) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta \text{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}})} \right\} \\ &= -i \left\{ \theta(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon - \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta} + \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon + \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} - i\eta} \right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g_q^2 \left\{ \theta(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon - \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta} + \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \frac{1}{\epsilon + \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} - i\eta} \right\}.$$

16. Donner une expression pour $\Im \Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$ (sans évaluer l'intégrale sur k).

Solution: (2 points) Avec

$$\Im \left[\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + ia\delta} \right] = -\pi \text{sign}(a)\delta(x),$$

on obtient

$$\Im \Sigma_s(\vec{k}, \epsilon) = -\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g_q^2 \left\{ \theta(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \delta(\epsilon - \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}}) - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \delta(\epsilon + \omega_0(\vec{q}) - \xi_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}.$$

17. * \rightarrow Pour $|\xi_{\vec{k}}|, |\epsilon| \ll c_0 k_F \ll E_F$, le résultat final peut être écrit sous la forme

$$G_s(\vec{k}, \epsilon) \approx \frac{B}{\epsilon - B\xi_{\vec{k}} + iAB|\epsilon|^3 \text{sign}(|\vec{k}| - k_F)}$$

avec des constantes $A, B > 0$.

Déterminer la masse effective et le temps de vie des “quasi”-électrons au voisinage du niveau de Fermi dû au couplage électron-phonon.

Solution: ((+ 3 points)) La masse effective est donnée par

$$\frac{k_F^2}{2m^*} = B\xi_{k_F}, \quad \text{ou } m^* = \frac{m}{B}.$$

Le temps de vie est donnée par

$$1/\tau_{\vec{k}} = AB|\omega|^3 \Big|_{\omega \rightarrow B\xi_{\vec{k}}} = AB^4 |\xi_{\vec{k}}|^3.$$

2.5 Phénomène de Cooper à $T \neq 0$

18. → Le diagramme ci-dessous décrit l'interaction effective entre deux électrons dû au couplage électron-phonon. Montrer que cette interaction est attractive pour $\omega < \omega_0(\vec{q})$.



Solution: (2 points) L'interaction effective est donnée par $g_{\vec{q}}^2 D^{(0)}(\vec{q}, \omega)$. Elle est attractive pour $\omega < \omega_0(\vec{q})$ parce que $D^{(0)}(\vec{q}, \omega < \omega_0(\vec{q})) < 0$.

Par la suite, nous allons approximer l'attraction entre électrons par une interaction $V(\vec{q}, \omega) = -\lambda$ pour $|\omega| < \omega_D$ et nulle sinon. Ici $\omega_D = c_0 k_F$ est la fréquence de Debye qui sert comme cut-off en énergie pour le couplage électron-phonon. Comme cette interaction est locale, elle agit seulement entre des électrons de spin opposé. Les calculs suivants seront faits à température finie.

19. → Similairement à ce que nous avons fait au TD1 pour calculer les diffusons, on peut construire une interaction effective en sommant sur une série de diagrammes en forme d'échelle. A température finie, l'interaction effective prend la forme

$$V_{\text{eff}}(\vec{q}, i\omega_m) = \frac{1}{-\lambda^{-1} + \Pi(\vec{q}, i\omega_m)}$$

avec

$$\Pi(\vec{q}, i\omega_m) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \omega_D} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\uparrow}^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, i\epsilon_n - i\omega_m) \mathcal{G}_{\downarrow}^{(0)}(-\vec{k}, -i\epsilon_n).$$

Est-ce que les fréquences de Matsubara ϵ_n et ω_m sont bosoniques ou fermioniques ?

Solution: (2 points) ϵ_n est une fréquence fermionique, tandis que ω_m est une fréquence bosonique.

20. → Evaluer la somme sur n dans l'expression pour $\Pi(\vec{q}, i\omega_m)$. (Pourquoi la méthode donnée dans le TD3 s'applique ici ?)

Solution: (3 points) Comme

$$\mathcal{G}_{\uparrow}^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, z - i\omega_m) \mathcal{G}_{\downarrow}^{(0)}(-\vec{k}, -z) \rightarrow -\frac{1}{|z|^2},$$

l'intégrale sur un cercle de rayon $R \rightarrow \infty$ est nulle. On peut donc utiliser la méthode du TD3, pour obtenir

$$\Pi(\vec{q}, i\omega_m) = - \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \omega_D} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{n_F(-\xi_{\vec{k}})}{-\xi_{\vec{k}} - i\omega_m - \xi_{\vec{k}-\vec{q}}} + \frac{n_F(\xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\omega_m)}{\xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\omega_m + \xi_{\vec{k}}} \right\}.$$

21. → En particulier, on obtient

$$\Pi(0,0) = \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \omega_D} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\xi_{\vec{k}}} (n_F(-\xi_{\vec{k}}) - n_F(\xi_{\vec{k}})) .$$

Transformer l'intégrale sur k dans une intégrale sur ξ .

Solution: (2 points) En utilisant la densité d'états, on obtient

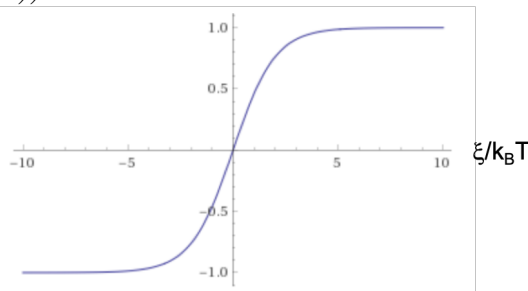
$$\Gamma(0,0) = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \nu(E_F + \xi) \frac{1}{2\xi} (n_F(-\xi) - n_F(\xi))$$

avec $\nu(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{d\xi_{\vec{k}}}{dk} \right)^{-1} \big|_{k=\sqrt{2mE}} = \sqrt{E/2m}/\pi^2$.

22. * → Tracer $n_F(-\xi) - n_F(\xi)$ et argumenter pourquoi, pour $k_B T \ll \omega_D \ll E_F$, on peut approximer

$$\Gamma(0,0) \approx \nu(E_F) \int_{k_B T}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{\xi} = \nu(E_F) \ln \frac{\omega_D}{k_B T}.$$

Solution: ((+ 2 points))



- $n_F(-\xi) - n_F(\xi)$ est une fonction impaire avec $n_F(-\xi) - n_F(\xi) \approx \text{sign}(\xi)$ pour $|\xi| > k_B T$.
- Pour $|\xi| \ll k_B T$, $n_F(-\xi) - n_F(\xi)$ est linéaire en ξ et compense le facteur $1/\xi$. Pour cela, la contribution à l'intégrale de l'intervalle $[-k_B T, k_B T]$ peut être négligée.
- Finalement, on peut approximer $\nu(E_F + \xi) \approx \nu(E_F)$ parce que $\omega_D \ll E_F$.

23. → Calculer $V_{\text{eff}}(0,0)$ et discuter le résultat.

Solution: (3 points) On obtient

$$V_{\text{eff}}(0,0) = \frac{1}{-\lambda + \nu(E_F) \ln \frac{\omega_D}{k_B T}}$$

L'attraction effective entre les électrons diverge à

$$k_B T = \omega_D e^{-1/(\lambda \nu(E_F))}.$$

Cette divergence indique que le système devient instable. Cette instabilité s'appelle instabilité de Cooper et est à la base de la supraconductivité dû au couplage électron-phonon.