

## EXAMEN FINAL – 3 février 2020 (2h)

---

**Modalités :** Documents & calculatrice autorisés.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
  - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche ( $\rightarrow$ ).
  - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
  - Les questions marquées par un astérisque (\*) sont des questions supplémentaires.
- 

### 1 Questions courtes. [ $\sim 20\%$ ]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1.  $\rightarrow$  Qu'est-ce le théorème de Wick et sous quelles conditions il s'applique ?
2.  $\rightarrow$  Qu'est qui détermine les valeurs de fréquences de Matsubara bosoniques ( $\omega_n = 2\pi n/\beta$ ) et fermioniques ( $\omega_n = 2\pi(n + 1/2)/\beta$ ) ?
3.  $\rightarrow$  Résumer les étapes principales de la construction de l'intégrale de chemin.
4.  $\rightarrow$  Expliquer comment on peut obtenir la trajectoire classique d'une particule à partir de l'intégrale de chemin.

### 2 Couplage électron-phonon. [ $\sim 80\%$ ]

En cours / TD, nous avons vu les fonctions de Green des électrons et les fonctions Green des phonons. Ici nous allons étudier le couplage entre les électrons et les phonons. Vous pouvez prendre  $\hbar = 1$ .

## 2.1 Electrons libres à $T = 0$

- On dénote  $a_{\vec{k},s}^\dagger$  et  $a_{\vec{k},s}$  les opérateurs de création et d'annihilation d'un électron avec quantité de mouvement  $\vec{k}$  et spin  $s = \uparrow, \downarrow$ . Donner l'Hamiltonien des électrons libres en seconde quantification, en mesurant les énergies par rapport au potentiel chimique  $\mu = E_F$ . Définir toutes les quantités.

- La fonction de Green ordonnée en temps des électrons est définie comme

$$G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}(t) = -i\langle T a_{\vec{k},s}(t) a_{\vec{k}',s'}^\dagger(0) \rangle.$$

Définir  $T$  et  $\langle \dots \rangle$ .

- On peut montrer que  $G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}^{(0)}(t)$  des électrons libres est donnée par

$$G_{\vec{k},s;\vec{k}',s'}^{(0)}(t) = -i\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}e^{-i\xi_{\vec{k}}t} \left\{ \theta(t)\theta(|\vec{k}| - k_F) - \theta(-t)\theta(k_F - |\vec{k}|) \right\} \equiv \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}G_s^{(0)}(\vec{k},t).$$

Déterminer la transformée de Fourier,  $G_s^{(0)}(\vec{k},\omega)$ .

- Faire un schéma indiquant la position des pôles de  $G_s^{(0)}(\vec{k},\omega)$  dans le plan complexe.

## 2.2 Phonons libres à $T = 0$

- On dénote  $b_{\vec{k}}^\dagger$  et  $b_{\vec{k}}$  les opérateurs de création et d'annihilation d'un phonon avec quantité de mouvement  $\vec{k}$ . Donner l'Hamiltonien des phonons libres en seconde quantification. Définir toutes les quantités.

- La fonction de Green ordonnée en temps des phonons est définie comme

$$D_{\vec{k},\vec{k}'}(t) = -i\langle T B_{\vec{k}}(t) B_{-\vec{k}'}(0) \rangle.$$

Définir  $T$ ,  $\langle \dots \rangle$  et  $B_{\vec{k}}$ .

- Démontrer que la fonction de Green des phonons libres peut être écrite sous la forme  $D_{\vec{k},\vec{k}'}^{(0)}(t) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}D^{(0)}(\vec{k},t)$  et déterminer  $D^{(0)}(\vec{k},t)$ . Détailler les étapes du calcul et définir toutes les quantités.

- La transformée de Fourier est donnée par

$$D^{(0)}(\vec{k},\omega) = \frac{2\omega_0(\vec{k})}{\omega^2 - \omega_0^2(\vec{k}) + i\eta}.$$

Faire un schéma indiquant la position des pôles de  $D^{(0)}(\vec{k},\omega)$  dans le plan complexe.

## 2.3 Couplage électron-phonon

- L'Hamiltonien décrivant le couplage entre électrons et phonons peut s'écrire sous la forme

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\vec{q},s} g_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q},s}^\dagger a_{\vec{k},s} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^\dagger).$$

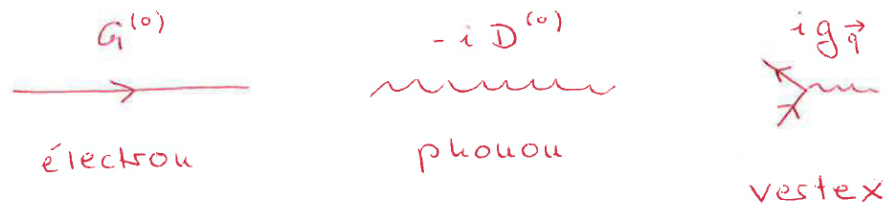
Ici  $V$  est le volume du système,  $g_{\vec{q}} = g\sqrt{|\vec{q}|}$  une constante de couplage et  $\omega_0(\vec{q}) = c_0|\vec{q}|$ .

Expliquer les processus physiques contenues dans cet Hamiltonien.

10. → Le couplage électron-phonon modifie la fonction de Green des électrons,  $G^{(0)} \rightarrow G$ , et la fonction de Green des phonons,  $D^{(0)} \rightarrow D$ . Quel est l'ordre le plus bas dans la constante de couplage  $g_{\vec{q}}$  qui donne des corrections aux fonctions de Green des électrons et la fonction de Green des phonons. Argumenter votre réponse.
11. Dessiner le diagramme de Feynmann correspondant à la correction à la fonction de Green des électrons à l'ordre le plus bas en  $g$ . Indiquer toutes les quantités de mouvement et énergies / fréquences. La fonction de Green des phonons est représentée par une ligne ondulée.
12. Dessiner le diagramme de Feynmann correspondant à la correction à la fonction de Green des phonons à l'ordre le plus bas en  $g$ . Indiquer toutes les quantités de mouvement et énergies / fréquences.

## 2.4 Fonction de Green des électrons à $T = 0$

Nous allons étudier la fonction de Green des électrons en présence du couplage électron-phonon à l'aide de diagrammes de Feynmann. Une ligne ondulée est associée avec un facteur  $-iD^{(0)}$ . Chaque vertex est associé avec un facteur  $ig_{\vec{q}}$ . Comme nous étudions des électrons avec spin, il faut sommer sur les spin. Les facteurs  $e^{i\omega_i\eta}$  peuvent être omis. Sinon les règles de Feynmann restent les mêmes que vous avez vu en cours.



13. Utiliser les règles de Feynmann pour montrer que la self-énergie des électrons à l'ordre le plus bas en  $g$  est donnée par

$$\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon) = i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} g_{\vec{q}}^2 G_s^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, \epsilon - \omega) D^{(0)}(\vec{q}, \omega).$$

14. → Donner une expression pour la fonction de Green des électrons  $G_s(\vec{k}, \epsilon)$  en utilisant  $G_s^{(0)}(\vec{k}, \epsilon)$  et  $\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$ .
15. → Evaluer l'intégrale sur  $\omega$  dans l'expression pour  $\Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$ .
16. Donner une expression pour  $\Im \Sigma_s(\vec{k}, \epsilon)$  (sans évaluer l'intégrale sur  $k$ ).
17. \* → Pour  $|\xi_{\vec{k}}|, |\epsilon| \ll c_0 k_F \ll E_F$ , le résultat final peut être écrit sous la forme

$$G_s(\vec{k}, \epsilon) \approx \frac{B}{\epsilon - B\xi_{\vec{k}} + iAB|\epsilon|^3 \text{sign}(|\vec{k}| - k_F)}$$

avec des constants  $A, B > 0$ .

Déterminer la masse effective et le temps de vie des “quasi”-électrons au voisinage du niveau de Fermi dû au couplage électron-phonon.

## 2.5 Phénomène de Cooper à $T \neq 0$

18. → Le diagramme ci-dessous décrit l'interaction effective entre deux électrons dû au couplage électron-phonon. Montrer que cette interaction est attractive pour  $\omega < \omega_0(\vec{q})$ .



Par la suite, nous allons approximer l'attraction entre électrons par une interaction  $V(\vec{q}, \omega) = -\lambda$  pour  $|\omega| < \omega_D$  et nulle sinon. Ici  $\omega_D = c_0 k_F$  est la fréquence de Debye qui sert comme cut-off en énergie pour le couplage électron-phonon. Comme cette interaction est locale, elle agit seulement entre des électrons de spin opposé. Les calculs suivants seront faits à température finie.

19. → Similairement à ce que nous avons fait au TD1 pour calculer les diffusons, on peut construire une interaction effective en sommant sur une série de diagrammes en forme d'échelle. A température finie, l'interaction effective prend la forme

$$V_{\text{eff}}(\vec{q}, i\omega_m) = \frac{1}{-\lambda^{-1} + \Pi(\vec{q}, i\omega_m)}$$

avec

$$\Pi(\vec{q}, i\omega_m) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \omega_D} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\uparrow}^{(0)}(\vec{k} - \vec{q}, i\epsilon_n - i\omega_m) \mathcal{G}_{\downarrow}^{(0)}(-\vec{k}, -i\epsilon_n).$$

Est-ce que les fréquences de Matsubara  $\epsilon_n$  et  $\omega_m$  sont bosoniques ou fermioniques ?

20. → Evaluer la somme sur  $n$  dans l'expression pour  $\Pi(\vec{q}, i\omega_m)$ . (Pourquoi la méthode donnée dans le TD3 s'applique ici ?)

21. → En particulier, on obtient

$$\Pi(0, 0) = \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \omega_D} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\xi_{\vec{k}}} (n_F(-\xi_{\vec{k}}) - n_F(\xi_{\vec{k}})).$$

Transformer l'intégrale sur  $k$  dans une intégrale sur  $\xi$ .

22. \* → Tracer  $n_F(-\xi) - n_F(\xi)$  et argumenter pourquoi, pour  $k_B T \ll \omega_D \ll E_F$ , on peut approximer

$$\Gamma(0, 0) \approx \nu(E_F) \int_{k_B T}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{\xi} = \nu(E_F) \ln \frac{\omega_D}{k_B T}.$$

23. → Calculer  $V_{\text{eff}}(0, 0)$  et discuter le résultat.