M2 Matière Quantique Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
Corrélations & Transport

https://www.pheliqs.fr/Lists/StaticFiles/Julia-S-Meyer/Teaching/M2MQ_Correlations.html

---

TD 4 – 22 janvier 2024

N'hésitez pas à me poser des questions (voir adresse email ci-dessus).

Les questions qui peuvent être abordées sans avoir résolu les questions précédentes sont marquées par une flêche ($\rightarrow$).

1 Combinaison de matrices de diffusion

Nous allons considérer un système unidimensionnel avec 2 barrières. Chacune des barrière est caractérisée par un potential $U_i(x) = U_i\delta(x - x_i)$.

1.1 Construction de la matrice de diffusion pour une barrière

Nous étudions d'abord l'Hamiltonien

$$H_1 = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_1\delta(x - x_1).$$

Considérer une particule d'énergie E incidente de la gauche. La fonction d'onde peut être écrite sous la forme

$$\psi(x) = \mathcal{N}\begin{cases} e^{ik(x-x_1)} + r_1e^{-ik(x-x_1)} & x < x_1 \\ t_1e^{ik(x-x_1)} & x > x_1 \end{cases},$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation.

1. Donner la relation entre le vecteur d'onde k et l'énergie E.

Solution:

$$E = \frac{k^2}{2m}$$

2. Utiliser la continuité de la fonction d'onde en $x = x_1$ pour trouver une relation entre r_1 et t_1.

Solution:

$$1 + r_1 = t_1$$

$$1 - t_1 = -r_1$$

3. Intégrer l'équation de Schrödinger stationnaire entre $x_1 - \epsilon$ est $x_1 + \epsilon$ est prendre la limite $\epsilon \to 0^+$ pour obtenir une relation entre la dérivée $\psi(x_1 - 0^+)$ et $\psi(x_1 + 0^+)$.

Solution:

$$-\frac{1}{2m}\psi"(x) + U_1\delta(x-x_1)\psi(x_1) = E\psi(x)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m}\int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} dx\ \psi"(x) + U_1\psi(x_1)\int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} dx\ \delta(x-x_1)\psi(x_1) \\ = & -\frac{1}{2m}\big(\psi'(x_1+\epsilon) - \psi'(x_1-\epsilon)\big) + U_1\psi(x_1) \\ = & \ E\int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} dx\ \psi(x). \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2m}\big(\psi'(x_1+0^+) - \psi'(x_1-0^+)\big) + U_1\psi(x_1) = 0$$

4. Utiliser le résultat de la question précédente pour trouver une relation entre r_1 et t_1.

Solution:

$$-\frac{ik}{2m}\left(t_1 - (1-r_1)\right) + U_1 t_1 = 0$$

$$1 - t_1\left(1 + i\frac{2mU_1}{k}\right) = r_1$$

5. Utiliser les résultats des questions 2 et 4 pour déterminer r_1 et t_1.

Solution:

$$1 - t_1\left(1 + i\frac{2mU_1}{k}\right) = -(1-t_1)$$

$$t_1 = \frac{1}{1 + i\frac{mU_1}{k}}$$

$$r_1 = -\frac{i\frac{mU_1}{k}}{1 + i\frac{mU_1}{k}}$$

En répétant les mêmes étapes pour une particule incidente de la droite avec fonction d'onde

$$\psi(x) = \mathcal{N}\begin{cases} t_1' e^{-ik(x-x_1)} & x < x_1 \\ e^{-ik(x-x_1)} + r_1' e^{ik(x-x_1)} & x > x_1 \end{cases},$$

on peut démontrer

$$t_1' = t_1, \qquad r_1' = -\frac{t_1}{t_1^*} r_1^* = r_1.$$

Avec cela, on peut construire la matrice de scattering

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t_1' \\ t_1 & r_1' \end{pmatrix}.$$

En particulier, $t_1 = t_1' = \sqrt{T_1}e^{i\varphi_{t1}}$ avec

$$T_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{mU_1}{k}\right)^2}$$

et $r_1 = r_1' = \sqrt{R_1}e^{i\varphi_{r1}}$ avec $R_1 = 1 - T_1$.

1.2 Matrice de diffusion des 2 barrières en série

La matrice de scattering S des deux barrières en série lie les amplitudes sortantes aux amplitudes rentrantes de part et d'autre des 2 barrières

$$\begin{pmatrix} b_L \\ b_R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_L \\ a_R \end{pmatrix}.$$

6. Au lieu d'utiliser la matrice de diffusion, on peut écrire une relation entre les amplitudes a_L, a_R, b_L, b_R à l'aide de la matrice de transfert M sous la forme

$$\begin{pmatrix} b_R \\ a_R \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M prend la forme

$$M = \frac{1}{t'} \begin{pmatrix} tt' - rr' & r' \\ -r & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution: On a

$$\begin{aligned} b_L &= ra_L + t'a_R, \\ b_R &= ta_L + r'a_R. \end{aligned}$$

Avec

$$a_R = \frac{b_L - ra_L}{t'},$$

on obtient

$$b_R = ta_L + r'\frac{b_L - ra_L}{t'} = \frac{tt' - rr'}{t'}a_L + \frac{r'}{t'}b_L.$$

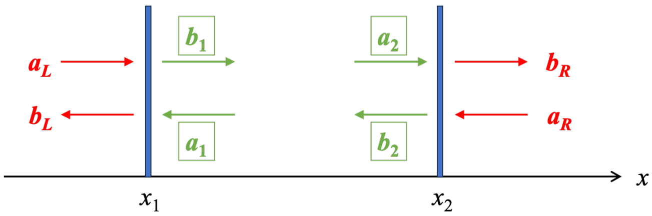
A comparer avec

$$\begin{aligned} b_R &= m_{11}a_L + m_{12}b_L, \\ a_R &= m_{21}a_L + m_{22}b_L. \end{aligned}$$

Donc
$$m_{11} = \frac{tt' - rr'}{t'}, \qquad m_{12} = \frac{r'}{t'}, \qquad m_{21} = -\frac{r}{t'}, \qquad m_{22} = \frac{1}{t'}.$$

7. Démontrer que la matrice de transfert des deux barrières en série est donnée par
$$M = M_2 \begin{pmatrix} e^{ik(x_2-x_1)} & \\ & e^{-ik(x_2-x_1)} \end{pmatrix} M_1.$$

Solution:



On a
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} b_R \\ a_R \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$
Entre les deux barrières il y a une propagation libre avec vecteur d'onde $\pm k$. Donc $a_2 = e^{ik(x_2-x_1)} b_1$ et $a_1 = e^{i(-k)(x_1-x_2)} b_2$ tel que
$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik(x_2-x_1)} & \\ & e^{-ik(x_2-x_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_R \\ a_R \end{pmatrix} &= M_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} e^{ik(x_2-x_1)} & \\ & e^{-ik(x_2-x_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= M_2 \begin{pmatrix} e^{ik(x_2-x_1)} & \\ & e^{-ik(x_2-x_1)} \end{pmatrix} M_1 \begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve donc
$$M = \frac{1}{t_1' t_2'} \begin{pmatrix} (t_1 t_1' - r_1 r_1')(t_2 t_2' - r_2 r_2') e^{ik\Delta x} - r_1 r_2' e^{-ik\Delta x} & r_1'(t_2 t_2' - r_2 r_2') e^{ik\Delta x} + r_2' e^{-ik\Delta x} \\ -r_2(t_1 t_1' - r_1 r_1') e^{ik\Delta x} - r_1 e^{-ik\Delta x} & -r_1' r_2 e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} \end{pmatrix}$$
avec $\Delta x = x_2 - x_1$. Cela implique
$$\begin{aligned} t' &= \frac{t_1' t_2'}{-r_1' r_2 e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}} \\ r &= \frac{r_2(t_1 t_1' - r_1 r_1') e^{ik\Delta x} + r_1 e^{-ik\Delta x}}{-r_1' r_2 e^{ik\Delta_x} + e^{-ik\Delta x}} \end{aligned}$$

8. Démontrer que la probabilité de transmission prend la forme
$$T = |t'|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2\chi)}$$
avec $\chi = k\Delta x + \arg(r_1' r_2)/2$.

Solution:

$$T = |t'|^2 = \frac{T_1 T_2}{R_1 R_2 + 1 - r_1' r_2 e^{2ik\Delta x} - (r_1' r_2)^* e^{-2ik\Delta x}}$$

9. En variant l'énergie, quelle est la transmission minimale ? Quelle est la transmission maximale ?

Solution:

$$T_{\min} = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{T_1 T_2}{(1 + \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

$$T_{\max} = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}$$

10. Considérer le cas $T_1 = T_2 \equiv T_0$. Quelle est la transmission minimale ? Quelle est la transmission maximale ? Tracer $T(\chi)$ pour les cas $T_0 \ll 1$ et $R_0 \ll 1$.

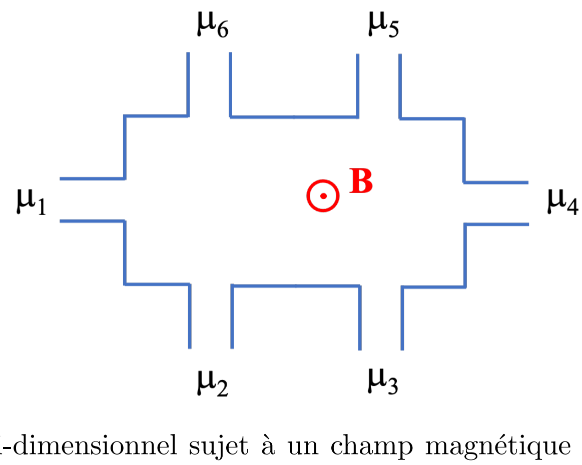
Solution:

$$T_{\min} = \frac{T_0^2}{(2 - T_0)^2} = \frac{(1 - R_0)^2}{(1 + R_0)^2}$$

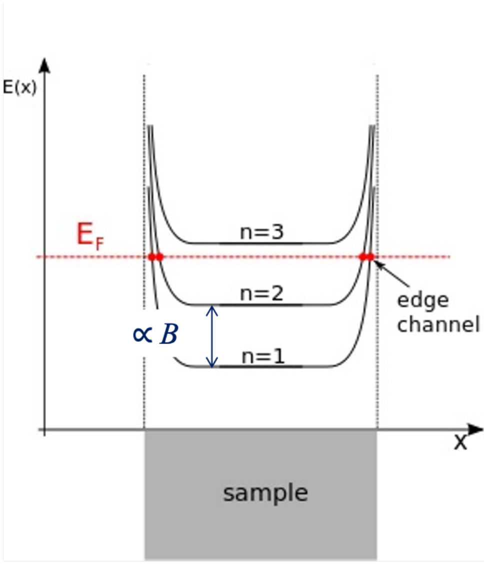
$$T_{\max} = \frac{T_0^2}{T_0^2} = 1$$

2 Quantum Hall effect : Landauer-Büttiker formalism

Ici nous considérons une croix de Hall, démontrée ci-dessous.



Il s'agit d'un système bi-dimensionnel sujet à un champ magnétique perpendiculaire. Dans le régime de l'effet Hall quantique le système forme de niveau de Landau. Dû au confinement latéral, les niveaux de Landau. occupés dans le bulk du système croisent le niveau de Fermi au voisinage des bords, ainsi formant des états de bord.



1. Indiquer le sens de propagation des états de bord pour la barre de Hall montrée ci-dessus ?

Solution: Les états de bord se propagent dans le sens horaire.

2. Nous supposons que le champ magnétique et potentiel chimique sont ajustés tel qu'il n'y a qu'un seul état de bord (dégénéré en spin). Déterminer toutes les probabilités de reflexion R_{ii} et probabilités de transmission T_{ij} $(i \neq j)$ pour $i, j = 1 \ldots 6$.

Solution: On a $T_{61} = T_{ii+1} = 1$ pour $i = 1 \ldots 5$ tandis que tous les R_{ii} ainsi que les autres T_{ij} sont nulles.

3. En prenant la formule de Landauer-Büttiker comme point de départ,

$$I_i = \frac{2e}{h} \int_0^\infty dE \sum_j \{\delta_{ij} - |S_{ij}|^2\} f_j(E),$$

démontrer qu'à $T = 0$ on peut écrire

$$\vec{I} = \frac{2e^2}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{V}$$

tel que $I_i = (2e^2/h)(V_i - V_{i+1})$. Ici $\vec{X} = (V_1, \ldots, V_6)^T$ et le potentiel dans le réservoir i est donné par $\mu_i = \bar{\mu} + eV_i$.

Solution: La matrice de diffusion S ne dépend pas de la température. En outre, $f_i(E) = \theta(\bar{\mu} + eV_i - E)$. Donc

$$I_i = \frac{2e}{h} \sum_j \{\delta_{ij} - |S_{ij}|^2\}(\bar{\mu} + eV_j) = \frac{2e^2}{h} \sum_j \{\delta_{ij} - |S_{ij}|^2\} V_j.$$

Avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient le résultat indiqué.

4. On considère qu'un courant I est appliqué entre les terminaux 1 et 4 : $I = I_1 = -I_4$. Les autres courants sont nuls. On choisira $V_6 = 0$. Déterminer les autres tensions V_i pour $i = 1 \dots 5$.

Solution:

$$\begin{aligned} 0 &= (2e^2/h)(V_2 - V_3) & \rightarrow \quad & V_3 = V_2 \\ 0 &= (2e^2/h)(V_3 - V_4) & \rightarrow \quad & V_4 = V_3 = V_2 \\ 0 &= (2e^2/h)(V_5 - V_6) & \rightarrow \quad & V_5 = V_6 = 0 \\ 0 &= (2e^2/h)(V_6 - V_1) & \rightarrow \quad & V_1 = V_6 = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$I = -\frac{2e^2}{h} V_2 \qquad \rightarrow \qquad V_2 = -\frac{h}{2e^2} I.$$

5. Déterminer la resistance longitudinale $R_L = (V_3 - V_2)/I$ ainsi que la resistance transverse ou resistance de Hall $R_T = (V_6 - V_2)/I$.

Solution: On obtient $R_L = 0$ et $R_T = h/(2e^2)$.