

TD 3 – 3 janvier 2023

N'hésitez pas à me poser des questions (voir adresse email ci-dessus).

Les questions qui peuvent être abordées sans avoir résolu les questions précédentes sont marquées par une flèche (→).

1 Random phase approximation (RPA)

En cours, nous avons vu l'approximation Hartree-Fock. (Pour des détails de calcul, voir le fichier "Hartree-Fock.pdf" sur la page web.)

Pour aller au delà de l'approximation Hartree-Fock, il faut considérer des diagrammes d'ordre supérieur en \hat{V} . Comme on l'a vu en cours, déjà à l'ordre 2 il existe une multitude de diagrammes et il faudra identifier lesquels sont importants.

- Les diagrammes similaires au diagramme de Hartree considéré dans l'exercice précédente, où la fonction de Green est connectée à une seule ligne d'interaction $\tilde{V}(q = 0)$, sont compensés dans un système neutre.
- Les diagrammes de type "arc en ciel" (voir ci-dessous) peuvent être inclus en rendant l'équation pour la self-énergie de Fock auto-cohérente :

$$\begin{aligned}\Sigma_F^{(1)}(\vec{k}, \omega) &= i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{k}'|) G_0(\vec{k}', \omega') e^{i\omega'\eta} \\ \rightarrow \Sigma_F(\vec{k}, \omega) &= i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{k}'|) G(\vec{k}', \omega') e^{i\omega'\eta},\end{aligned}$$

similaire à ce qu'on a vu dans le cas de systèmes désordonnés sans interactions.

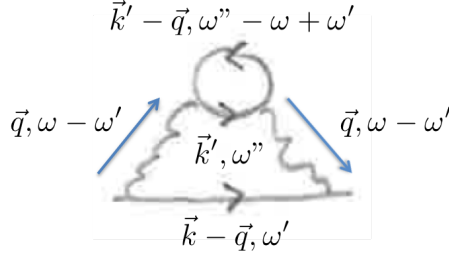


- Ici nous allons nous intéresser aux diagrammes qui contiennent des insertions dans la ligne d'interaction du diagramme de Fock (voir ci-dessous) et qui peuvent être décrites par une interaction effective $V_{\text{eff}}(\vec{q}, \delta\omega)$.



1. → Indiquer les quantités de mouvements \vec{k}_i et énergies ω_i des différentes fonctions de Green dans le diagramme à une boucle ci-dessus.

Solution: Utilisant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie à chaque vertex, on obtient le résultat suivant :



2. Donner la formule qui correspond à ce diagramme de Feynman.

Solution:

$$\begin{aligned} \Sigma_F^{(2)}(\vec{k}, \omega) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{V}^2(q) \times \\ &\quad \times G_0(\vec{k} - \vec{q}, \omega') G_0(\vec{k}', \omega'') G_0(\vec{k}' - \vec{q}, \omega'' - \omega + \omega') e^{i(\omega' + \omega'')\eta}. \end{aligned}$$

3. → En combinant le résultat avec le résultat pour $\Sigma_F^{(1)}(\vec{k}, \omega)$, on obtient

$$\Sigma_{RPA}^{(2)}(\vec{k}, \omega) = i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{V}_{\text{eff}}^{(2)}(\vec{q}, \omega - \omega') G_0(\vec{k} - \vec{q}, \omega') e^{i\omega'\eta}$$

avec

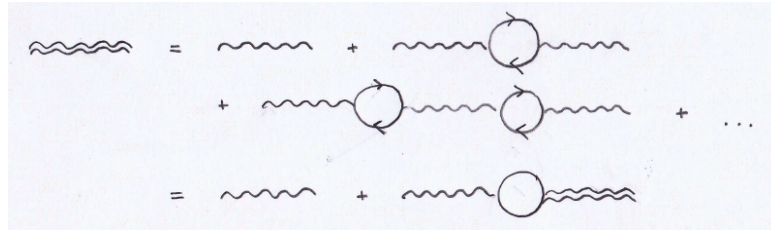
$$\tilde{V}_{\text{eff}}^{(2)}(\vec{q}, \delta\omega) = \tilde{V}(q) - \tilde{V}^2(q) \chi(\vec{q}, \delta\omega)$$

et

$$\chi(\vec{q}, \delta\omega) = i \int \frac{d\omega''}{2\pi} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} G_0(\vec{k}', \omega'') G_0(\vec{k}' - \vec{q}, \omega'' - \delta\omega) e^{i\omega''\eta}.$$

Des termes d'ordre supérieur en \hat{V} peuvent être générés en incluant davantage de boucles fermioniques dans l'interaction. Ecrire une équation de Dyson qui permet de resommer toutes ces contributions pour obtenir $\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, \delta\omega)$ et représenter la graphiquement. Pour l'interaction effective on utilisera une ligne ondulée double.

Solution:



L'équation de Dyson correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, \omega) &= \tilde{V}(q) + \tilde{V}(q)(-\chi(\vec{q}, \omega))\tilde{V}(q) + \tilde{V}(q)(-\chi(\vec{q}, \omega))\tilde{V}(q)(-\chi(\vec{q}, \omega))\tilde{V}(q) + \dots \\ &= \tilde{V}(q) + \tilde{V}(q)(-\chi(\vec{q}, \omega))\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, \omega). \end{aligned}$$

4. Démontrer

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, \delta\omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + 4\pi e^2 \chi(\vec{q}, \delta\omega)}.$$

Solution: En utilisant l'équation de Dyson, on obtient

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, \delta\omega) = \frac{\tilde{V}(q)}{1 + \tilde{V}(q)\chi(\vec{q}, \delta\omega)} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + 4\pi e^2 \chi(\vec{q}, \delta\omega)}.$$

5. → Parce que l'interaction de Coulomb est à longue portée, $\tilde{V}(q)$ diverge dans la limite $q \rightarrow 0$. Nous allons maintenant calculer $\lim_{q \rightarrow 0} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, 0)$.

Pour évaluer $\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\vec{q}, 0)$, calculer d'abord l'intégrale sur ω'' .

Solution: On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega''}{2\pi} G_0(\vec{k}', \omega'') G_0(\vec{k}' - \vec{q}, \omega'') e^{i\omega''\eta} \\ = & \int \frac{d\omega''}{2\pi} \frac{1}{\omega'' - \xi_{\vec{k}'} + i\eta' \text{sign}(|\vec{k}'| - k_F)} \frac{1}{\omega'' - \xi_{\vec{k}' - \vec{q}} + i\eta' \text{sign}(|\vec{k}' - \vec{q}| - k_F)} e^{i\omega''\eta}. \end{aligned}$$

A cause du facteur $e^{i\omega''\eta}$, il faut fermer le contour dans le plan complexe supérieur. On obtient

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega''}{2\pi} G_0(\vec{k}', \omega'') G_0(\vec{k}' - \vec{q}, \omega'') e^{i\omega''\eta} \\ = & i \left[\theta(k_F - |\vec{k}' - \vec{q}|) \frac{1}{\delta\omega + \xi_{\vec{k}' - \vec{q}} - \xi_{\vec{k}'} + i\eta' + i\eta' \text{sign}(|\vec{k}'| - k_F)} \right. \\ & \left. - \theta(k_F - |\vec{k}'|) \frac{1}{\xi_{\vec{k}' - \vec{q}} - \xi_{\vec{k}'} - i\eta' - i\eta' \text{sign}(|\vec{k}' - \vec{q}| - k_F)} \right] \\ = & i \frac{\theta(k_F - |\vec{k}' - \vec{q}|) - \theta(k_F - |\vec{k}'|)}{\xi_{\vec{k}' - \vec{q}} - \xi_{\vec{k}'} + i\eta' \text{sign}(|\vec{k}'| - k_F)} = i \frac{\theta(k_F - |\vec{k}' - \vec{q}|) - \theta(k_F - |\vec{k}'|)}{\xi_{\vec{k}' - \vec{q}} - \xi_{\vec{k}'} - i\eta' \text{sign}(|\vec{k}' - \vec{q}| - k_F)}. \end{aligned}$$

6. Démontrer $\lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \chi(\vec{q}, 0) = \nu(E_F)$.

Solution: En utilisant la définition de $\chi(\vec{q}, \omega)$ est le résultat obtenu pour la question 5., on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \chi(\vec{q}, 0) &= - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\theta(k_F - |\vec{k}' - \vec{q}|) - \theta(k_F - |\vec{k}'|)}{\xi_{\vec{k}' - \vec{q}} - \xi_{\vec{k}'} - i\eta' \text{sign}(|\vec{k}' - \vec{q}| - k_F)} \\ &= - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\frac{\partial}{\partial \vec{q}} \theta(k_F - |\vec{k}' - \vec{q}|) \big|_{\vec{q}=0} \vec{q}}{-\frac{1}{m} \vec{k}' \vec{q} - i\eta' \text{sign}(|\vec{k}'| - k_F)} \\ &= - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{-\delta(k_F - |\vec{k}'|) (-\frac{1}{2|\vec{k}'|}) (2\vec{k}') \vec{q}}{-\frac{1}{m} \vec{k}' \vec{q} - i\eta' \text{sign}(|\vec{k}'| - k_F)} \\ &= m \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{k}'|} \delta(k_F - |\vec{k}'|) = \frac{m}{2\pi^2} \int dk' k' \delta(k_F - k') = \frac{mk_F}{2\pi^2} = \nu(E_F). \end{aligned}$$

7. → Calculer $\lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \tilde{V}(\vec{q}, 0)$ et commenter le résultat.

Solution: Avec les fomules données pour les questions 4. et 6., on obtient

$$\lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \tilde{V}(\vec{q}, 0) = \frac{1}{\nu(E_F)}.$$

Il n'y a donc plus de divergence. L'interaction effective est à courte portée à cause de l'écrantage par la mer de Fermi.

8. → En général, la fonction $\chi(\vec{q}, \delta\omega)$ est complexe. La self-énergie sera donc complexe aussi, $\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \omega) = \Re\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \omega) + i\Im\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \omega)$. Quel est le signe de $\Im\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \omega)$? Comment est-ce que la fonction spectrale est modifiée?

Solution: Le signe de la partie imaginaire de la fonction de Green est dicté par la causalité. Donc $\text{sign}(\Im\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \omega)) = -\text{sign}(|\vec{k}| - k_F)$. Au lieu d'un Dirac, on obtient une Lorentzienne avec une largeur qui est proportionnelle à $|\Im\Sigma_{RPA}(\vec{k}, \tilde{\xi}_{\vec{k}})|$

CONCLUSION : L'interaction effective $\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}, 0)$ décrit l'écrantage statique. En prenant la transformée de Fourier, on obtient

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{e^2}{r} e^{-r/\lambda_{TF}}$$

avec la longueur d'écrantage de Thomas-Fermi $\lambda_{TF} = 1/\sqrt{4\pi e^2 \nu(E_F)}$.

La partie imaginaire de la self-énergie décrit le temps de vie des “quasi-particules”, $\Im\Sigma \sim 1/\tau_{qp}$. On trouve que ce temps de vie diverge quand on s'approche du niveau de Fermi, $\tau_{qp}(E) \propto (E - E_F)^{-2}$. Cette observation justifie la description du système en tant que “liquide de Fermi”.