Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)

EXAMEN FINAL – 2 février 2022 (2h)

---

1 Questions courtes. [$\sim 20\%$]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent – la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1. $\rightarrow$ Dessiner au moins 4 des diagrammes de Feynman qui apparaissent dans la self-énergie au 2nd ordre en V.

   Solution: *(4 points)* La self-énergie ne contient que des diagrammes connectés et 1-particule irréductibles.

2. $\rightarrow$ Qu'est-ce une quasiparticule ?

   Solution: *(3 points)* Une quasiparticule est une excitation de basse énergie d'un système en interaction, caractérisée par des nombre quantiques et des paramètres dynamiques effectifs. Elle possède une durée de vie finie, mais très longue. Les quasiparticules du liquide de Fermi sont des quasi-électrons et quasi-trous qui ont les mêmes nombres quantiques que les électrons qui constituent le système (quantité de mouvement et spin 1/2). Leur temps de vie, décrit par la partie imaginaire de la self-énergie, diverge quand on s'approche du niveau de Fermi.

3. $\rightarrow$ Interpréter la formulation en intégrale de chemin pour le propagateur $\langle q_f|e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)}|q_i\rangle$.

   Solution: *(3 points)*

   $$\langle q_f|e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)}|q_i\rangle = \int_{q(t_i)=q_i;q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q\, e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}[q]}$$

   Le propagateur est donnée par une intégrale sur toutes les trajectoires (chemins) qui lient q_i à q_f dans un intervalle de temps $t_f - t_i$. Leur poids est déterminé par l'action classique associée à la trajectoire qui donne un facteur de phase. Les différentes trajectoires interfèrent. Dans la limite classique $\hbar \to 0$, seulement la trajectoire classique correspondant à un point stationnaire de l'action survit.

2 La susceptibilité de spin. [$\sim$ 80%]

Dans cet exercice, nous allons considérer on gaz d'électrons sous champ magnétique de Zeeman – c'est-à-dire, on s'intéressera à l'effet du champ sur le spin des électrons. L'Hamiltonien prend la forme

$$H(t) = H_0 - g\mu_B \int d^3r \, \vec{B}(\vec{r},t) \cdot \vec{S}(\vec{r},t),$$

où μ_B est le magneton de Bohr, $g \approx 2$ le facteur de Landé et

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t) \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{r},t).$$

Ici $\vec{\sigma}$ est un vecteur de matrices de Pauli,

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $(\sigma_i)_{\alpha\beta}$ dénote les éléments de la matrice σ_i. L'Hamiltonien H_0 décrit les électrons libres en absence du champ.

1. $\rightarrow$ Donner l'expression de H_0 (attention au degré de liberté de spin).

> **Solution:** *(1 point)*
>
> $$H_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}$$

2. Déterminer une relation entre le vecteur d'onde de Fermi k_F et la densité du gaz d'électrons $\bar{n}$ en absence du champ magnétique. Spécifier aussi la densité d'états au niveau de Fermi

> **Solution:** *(3 points)* Le nombre d'électrons est donné par
>
> $$N = \sum_{|\vec{k}|<k_F;\sigma} = 2L^3 \int_{|\vec{k}|<k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 2L^3 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} dk \, k^2 = L^3 \frac{1}{3\pi^2} k_F^3.$$
>
> Donc $\bar{n} = k_F^3/(3\pi^2)$. La densité d'états est donnée par $\mathcal{N} = mk_F/\pi^2$.

Dans un premier temps, nous allons étudier l'effet d'un champ statique le long de l'axe z, $\vec{B}(t) = B\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire. Pour ce cas, nous allons déterminer les fonctions de Green exactes et calculer l'aimantation du système en fonction du champ magnétique.

3. Montrer que, pour $g \approx 2$, l'Hamiltonien prend la forme $H = H_\uparrow + H_\downarrow$ avec

$$H_\sigma = \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B \right) c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}.$$

   Ici $\sigma =\uparrow,\downarrow$ ainsi que $\uparrow= +$ et $\downarrow= -$. On utilisera la notation $\epsilon_{\vec{k}\sigma} = \frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B$.

Solution: *(2 points)*

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} - 2\mu_B B S_z = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} - \mu_B B \sum_{\vec{k};\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} c^\dagger_{\vec{k}\alpha} (\sigma_z)_{\alpha\beta} c_{\vec{k}\beta} \\ &= \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{k^2}{2m} c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} - \mu_B B \sum_{\vec{k}} \left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow} - c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\downarrow} \right) = \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B \right) c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma} \end{aligned}$$

Par la suite, on va travailler avec $K = H - \mu N$, où μ est le potentiel chimique (commun à tous les électrons).

4. $\rightarrow$ Décrire l'état fondamental du système.

Solution: *(2 points)* A $T = 0$, tous les états jusqu'au potentiel chimique sont occupés. Pour les états de spin up, ce sont les états avec

$$\epsilon_{\vec{k}\uparrow} = \frac{k^2}{2m} - \mu_B B \leq \mu \qquad \text{ou} \qquad \frac{k^2}{2m} \leq \mu + \mu_B B.$$

Pour les états de spin up, ce sont les états avec

$$\epsilon_{\vec{k}\uparrow} = \frac{k^2}{2m} + \mu_B B \leq \mu \qquad \text{ou} \qquad \frac{k^2}{2m} \leq \mu - \mu_B B.$$

5. $\rightarrow$ Trouver les vecteurs d'onde de Fermi $k_{F\sigma}$.

Solution: *(1 point)* Selon les considérations de la question précédente, on obtient

$$k_{F\sigma} = \sqrt{2m(\mu \pm \mu_B B)}.$$

Donc $k_{F\uparrow} > k_{F\downarrow}$.

6. Déterminer les fonctions de Green ordonnées en temps $\tilde{G}_\sigma(\vec{k}, t)$.

Solution: *(1 point)* Le calcul est exactement le même que dans le cas sans champ magnétique sauf qu'il faut remplacer $\xi_{\vec{k}}$ par $\xi_{\vec{k}\sigma} = \epsilon_{\vec{k}\sigma} - \mu$. Donc

$$G_\sigma(\vec{k}, t) = -ie^{-i\xi_{\vec{k}\sigma} t} \left\{ \theta(t)\theta(\xi_{\vec{k}\sigma}) - \theta(-t)\theta(-\xi_{\vec{k}\sigma}) \right\}.$$

7. Montrer que les fonctions de Green $\tilde{\tilde{G}}_\sigma(\vec{k}, \omega)$ sont données par

$$\tilde{\tilde{G}}_\sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - (\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B - \mu) + i\eta \,\mathrm{sign}(|\vec{k}| - k_{F\sigma})}.$$

Solution: *(2 points)* Le calcul est exactement le même que dans le cas sans champ magnétique sauf qu'il faut remplacer $\xi_{\vec{k}}$ par $\xi_{\vec{k}\sigma} = \epsilon_{\vec{k}\sigma} - \mu$. Donc

$$\tilde{\tilde{G}}_\sigma(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega - (\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B - \mu) + i\eta\,\mathrm{sign}(|\vec{k}| - k_{F\sigma})}$$

en utilisant l'expression pour $\xi_{\vec{k}\sigma}$ et le fait que $\mathrm{sign}\,\xi_{\vec{k}\sigma} = \mathrm{sign}(|\vec{k}| - k_{F\sigma})$.

L'aimantation locale du système est définie comme

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \frac{g\mu_B}{2} \sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \langle \psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t)\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r},t)\rangle.$$

Nous allons la calculer dans l'état fondamental du système. (Voir question 4.)

8. $\rightarrow$ Argumenter pourquoi l'aimantation globale pour le cas considéré ici est donnée par

$$\vec{M} = \mu_B \sum_{\vec{k}} \langle c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow} - c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\downarrow}\rangle \vec{u}_z.$$

Solution: *(2 points)* On utilise $g \approx 2$.

Comme le champ est constant, l'aimantation est indépendante de $\vec{r}$ et de t, c.a.d., $\vec{M} = L^3\vec{M}(\vec{r},t) = L^3\vec{M}(0,0)$. En outre, $\vec{M}(0,0)$ peut-être exprimé comme la transformée de Fourier inverse de $\tilde{\vec{M}}(\vec{k},0)$.

Quand le champ est appliqué le long de l'axe z, l'Hamiltonien est diagonal en spin et pour cela $\langle c^\dagger_{\vec{k}\alpha} c_{\vec{k}\beta}\rangle \propto \delta_{\alpha\beta}$. Donc les composants M_x et M_y sont nuls et

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \mu_B \sum_{\vec{k};\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \langle c^\dagger_{\vec{k}\alpha}(\sigma_z)_{\alpha\beta} c_{\vec{k}\beta}\rangle \vec{u}_z \\ &= \mu_B \sum_{\vec{k}} \langle c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow} - c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\downarrow}\rangle \vec{u}_z.\end{aligned}$$

9. Calculer l'aimantation.

Solution: *(2 points)* Avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \mu_B \sum_{\vec{k}} \left[\theta(k_{F\uparrow} - |\vec{k}|) - \theta(k_{F\downarrow} - |\vec{k}|)\right] \vec{u}_z \\ &= \mu_B L^3 \left[\frac{k^3_{F\uparrow}}{6\pi^2} - \frac{k^3_{F\downarrow}}{6\pi^2}\right] \\ &= \frac{\mu_B}{6\pi^2}(2m\mu)^{3/2} L^3 \left[\left(1 + \frac{\mu_B B}{\mu}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{\mu_B B}{\mu}\right)^{3/2}\right].\end{aligned}$$

10. $\rightarrow$ Décrire comment obtenir le résultat ci-dessus en utilisant les fonctions de Green $G_\sigma(\vec{k},t)$

> **Solution:** *(1 point)* On peut utiliser
>
> $$\langle c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}\rangle = -iG_\sigma(\vec{k},0^-) = \theta(k_{F\sigma} - |\vec{k}|).$$

Dans un deuxième temps, nous allons étudier l'effet d'un champ arbitraire en réponse linéaire. Cela nous permettra de déterminer l'aimantation au premier ordre en champ à partir de la susceptibilité de spin,

$$M_i(\vec{r},t) = -\frac{g^2\mu_B^2}{4}\int d^3r' \int dt'\ \chi^R_{ij}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')B_j(\vec{r}',t')$$

pour $i,j = x,y,z$**.**

11. $\rightarrow$ Utiliser la théorie de la réponse linéaire pour montrer que l'aimantation au 1er ordre en champ peut être obtenu à partir de la susceptibilité de spin

$$\chi^R_{ij}(\vec{r},t) = -i\theta(t)\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'=\uparrow,\downarrow}\langle[\psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t)(\sigma_i)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r},t),\psi^\dagger_{\alpha'}(0,0)(\sigma_j)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(0,0)]\rangle_0.$$

Expliques les étapes.

> **Solution:** *(4 points)* Pour calculer
>
> $$\vec{M}(\vec{r},t) = \langle\hat{\vec{M}}(\vec{r},t)\rangle = \langle g\frac{\mu_B}{2}\sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow}\psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t)\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r},t)\rangle,$$
>
> on utilise la représentation d'interaction avec
>
> $$\hat{V} = -g\mu_B\vec{B}(t)\cdot\vec{S} = -g\mu_B\vec{B}(t)\cdot\vec{S}$$

On peut démontrer que la susceptibilité est diagonale, $\chi_{ij}(\vec{r},t) = \chi_{ii}(\vec{r},t)\delta_{ij}$.

12. $\rightarrow$ Argumenter pourquoi $\chi_{xx}(t) = \chi_{yy}(t) = \chi_{zz}(t)$.

> **Solution:** *(1 point)* Comme il n'y a pas de direction préférentielle en absence du champ, toutes les directions sont équivalentes et ont donc la même susceptibilité.

En prenant la transformée de Fourier, il suffit donc de calculer

$$\tilde{\chi}^R_{zz}(\vec{q},t) = -i\theta(t)\sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow}\alpha\alpha'\langle[c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t)c_{\vec{k}\alpha}(t), c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\alpha'}(0)c_{\vec{k}'\alpha'}(0)]\rangle_0.$$

On commencera par calculer

$$\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q},t) = -i\sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow}\alpha\alpha'\langle Tc^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t^+)c_{\vec{k}\alpha}(t^-)c^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q}\alpha'}(0^+)c_{\vec{k}'\alpha'}(0^-)\rangle_0.$$

13. → Expliquer pourquoi la fonction de Green G^0_α ne dépend pas de α.

Solution: *(1 point)* Comme la fonction de Green G^0 est évaluée en absence du champ magnétique, l'énergie ne dépend pas du spin et donc la fonction de Green ne dépend pas du spin

14. → Utiliser le théorème de Wick pour obtenir

$$\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q},t) = -i \sum_{\vec{k};\alpha=\uparrow,\downarrow} \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},t)\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},-t).$$

Solution: *(3 points)* Le théorème de Wick donne

$$\begin{aligned}
& \langle T c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t^+) c_{\vec{k}\alpha}(t^-) c^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q}'\alpha'}(0^+) c_{\vec{k}'\alpha'}(0^-)\rangle_0 \\
= & \langle T c_{\vec{k}\alpha}(t^-) c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t^+)\rangle \langle T c_{\vec{k}'\alpha'}(0^-) c^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q}'\alpha'}(0^+)\rangle_0 \\
& -\langle T c_{\vec{k}\alpha}(t^-) c^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q}'\alpha'}(0^+)\rangle \langle T c_{\vec{k}'\alpha'}(0^-) c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t^+)\rangle_0 \\
= & -\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},0^-)\tilde{G}^0_{\alpha'}(\vec{k}',0^-)\delta_{\vec{q},0} + \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},t)\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},-t)\delta_{\vec{k}',\vec{k}-\vec{q}}\delta_{\alpha\alpha'}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q},t) &= i \sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow} \alpha\alpha' \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},0^-)\tilde{G}^0_{\alpha'}(\vec{k}',0^-)\delta_{\vec{q},0} \\
&\quad -i \sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow} \alpha\alpha' \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},t)\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},-t)\delta_{\vec{k}',\vec{k}-\vec{q}} \\
&= i \left(\sum_{\vec{k};\alpha=\uparrow,\downarrow} \alpha \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},0^-) \right)^2 \delta_{\vec{q},0} - i \sum_{\vec{k};\alpha,=\uparrow,\downarrow} \alpha^2 \tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},t)\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},-t).
\end{aligned}$$

Comme G^0_α ne dépend pas de α et avec $\alpha^2 = 1$, on obtient le résultat indiqué.

15. → La transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{\tilde{\chi}}_{zz}(\vec{q},\omega) = -i \sum_{\vec{k};\alpha=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k},\omega')\tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},\omega'-\omega).$$

Evaluer l'intégrale sur ω'.

Solution: *(3 points)* On évalue

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k},\omega')\tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},\omega'-\omega) \\
= & \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{\omega' - \xi_{\vec{k}} + i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}})} \frac{1}{\omega' - \omega - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}.
\end{aligned}$$

L'intégrale peut être évaluée en fermant le contour dans le plan complexe (supérieur ou inférieur). L'intégrant à deux pôles à

$$\omega' = \xi_{\vec{k}} - i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}}) \qquad \text{et} \qquad \omega' = \omega + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} - i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}).$$

En fermant dans le plan complexe supérieur, les pôles contribuent si leur partie imaginaire est positive :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k}, \omega' - \omega) \tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k} - \vec{q}, \omega') \\
= \;& i\Big\{ \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}})}{\xi_{\vec{k}} - i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}}) - \omega - \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}})} \\
& + \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}{\omega + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} - i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}) - \xi_{\vec{k}} + i\eta\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}})} \Big\} \\
= \;& -i \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}}) - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}{\omega - \xi_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta(\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}}) -\, \mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}))}
\end{aligned}$$

Donc (en sommant sur α)

$$\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q}, \omega) = -2 \sum_{\vec{k}} \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}}) - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}{\omega - \xi_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta(\,\mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}}) -\, \mathrm{sign}(\xi_{\vec{k}-\vec{q}}))}.$$

16. Déduire $\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q}, \omega)$ du résultat de la question précédente.

Solution: *(1 point)* Il suffit de modifier le signe de la partie imaginaire pour obtenir

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q}, \omega) = -2 \sum_{\vec{k}} \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}}) - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}{\omega - \xi_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta}.$$

Pour comparer avec le résultat de la 1ère partie, on s'intéressera en particulier à $\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q} \to 0, 0)$. (A noter : les limites $\vec{q} \to 0$ et $\vec{\omega} \to 0$ ne commuttent pas !)

17. Montrer que dans la limite continue on obtient

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q} \to 0, 0) = \frac{L^3}{2\pi^2} \lim_{q \to 0} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \left(\int_0^{k_F} - \int_0^{k_F + q\cos\theta} \right) dk\, \frac{mk}{q\cos\theta},$$

où la limite $\eta \to 0$ a déjà été prise et $\vec{k} \cdot \vec{q} = kq\cos\theta$.

Solution: *(2 points)*

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q},\omega) &= -2\sum_{\vec{k}} \frac{\theta(-\xi_{\vec{k}}) - \theta(-\xi_{\vec{k}-\vec{q}})}{\omega - \xi_{\vec{k}} + \xi_{\vec{k}-\vec{q}} + i\eta} \\
&= -2L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\theta(k_F^2 - k^2) - \theta(k_F^2 - (\vec{k}-\vec{q})^2)}{\omega - \frac{1}{2m}[k^2 - (\vec{k}-\vec{q})^2] + i\eta} \\
&= -\frac{L^3}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \\
&\qquad \left(\int_0^{k_F} - \int_0^{\sqrt{k_F^2 - q^2\sin^2\theta} + q\cos\theta} \right) dk \, k^2 \frac{1}{\omega - \frac{q}{2m}(2k\cos\theta - q) + i\eta}.
\end{aligned}$$

Dans la limite $q \to 0$, on peut négliger les termes quadratiques en q pour obtenir le résultat indiqué.

18. $\rightarrow$ Démontrer le résultat final

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q} \to 0, 0) = \frac{mk_F L^3}{\pi^2}.$$

Solution: *(2 points)*

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q} \to 0, 0) = -\frac{L^3}{4\pi^2} \lim_{q\to 0} \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \frac{m[k_F^2 - (k_F + q\cos\theta)^2]}{q\cos\theta} = \frac{mk_F L^3}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta.$$

19. $\rightarrow$ Déterminer l'aimantation pour le cas $\vec{B}(\vec{r},t) = B\vec{u}_z$ en utilisant la susceptibilité de spin.

Solution: *(2 points)* Avec

$$M_i(\vec{r},t) = \frac{g^2\mu_B^2}{4} \int d^3r' \int dt' \, \chi^R_{ij}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') B_j(\vec{r}'t'),$$

on obtient

$$M_z = \frac{g^2\mu_B^2}{4} \chi^R_{zz}(\vec{q} \to 0, 0) B = \frac{\mu_B^2 m k_F L^3}{\pi^2} B = \frac{\mu_B^2 m}{\pi^2} \sqrt{2m\mu} L^3 B.$$

20. Comparer le résultat obtenu en réponse linéaire avec le résultat exact de la question 9. Est-ce que la réponse linéaire donne le résultat exact ? Pourquoi ? Dans quelle limite est-ce une bonne approximation ?

Solution: *(3 points)* Le résultat exact n'est pas linéaire en B – il ne peut donc pas être reproduit pas la réponse linéaire. Par contre, pour $\mu_B B/2 \ll \mu$, on peut approximer le résultat exact par

$$\vec{M} \approx \frac{\mu_B}{6\pi^2}(2m\mu)^{3/2}L^3 \left[\left(1+\frac{3\mu_B B}{2\mu}\right)-\left(1-\frac{3\mu_B B}{2\mu}\right)\right]\vec{u}_z = \frac{\mu_B^2 m}{\pi^2}\sqrt{2m\mu}L^3 B\vec{u}_z,$$

ce qui est le résultat obtenu en réponse linéaire.