Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)

EXAMEN FINAL – 2 février 2022 (2h)

Modalités : Documents & calculatrice autorisés.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche ($\rightarrow$).
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
- Les questions marquées par un astérisque ($*$) sont des questions supplémentaires.

---

1 Questions courtes. [$\sim$ 20%]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent – la moitié d'une page au maximum! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1. $\rightarrow$ Dessiner au moins 4 des diagrammes de Feynman qui apparaissent dans la self-énergie au 2nd ordre en V.
2. $\rightarrow$ Qu'est-ce une quasiparticule ?
3. $\rightarrow$ Interpréter la formulation en intégrale de chemin pour le propagateur $\langle q_f|e^{-i\hat{K}(t_f-t_i)}|q_i\rangle$.

2 La susceptibilité de spin. [$\sim$ 80%]

Dans cet exercice, nous allons considérer on gaz d'électrons sous champ magnétique de Zeeman – c'est-à-dire, on s'intéressera à l'effet du champ sur le spin des électrons. L'Hamiltonien prend la forme

$$H(t) = H_0 - g\mu_B \int d^3r\ \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{S}(\vec{r},t),$$

où μ_B est le magneton de Bohr, $g \approx 2$ le facteur de Landé et

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t)\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r},t).$$

Ici $\vec{\sigma}$ est un vecteur de matrices de Pauli,

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $(\sigma_i)_{\alpha\beta}$ dénote les éléments de la matrice σ_i. L'Hamiltonien H_0 décrit les électrons libres en absence du champ.

1. $\rightarrow$ Donner l'expression de H_0 (attention au degré de liberté de spin).

2. Déterminer une relation entre le vecteur d'onde de Fermi k_F et la densité du gaz d'électrons $\bar{n}$ en absence du champ magnétique. Spécifier aussi la densité d'états au niveau de Fermi

Dans un premier temps, nous allons étudier l'effet d'un champ statique le long de l'axe z, $\vec{B}(t) = B\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire. Pour ce cas, nous allons déterminer les fonctions de Green exactes et calculer l'aimantation du système en fonction du champ magnétique.

3. Montrer que, pour $g \approx 2$, l'Hamiltonien prend la forme $H = H_\uparrow + H_\downarrow$ avec

$$H_\sigma = \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B \right) c^\dagger_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}.$$

   Ici $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ainsi que $\uparrow = +$ et $\downarrow = -$. On utilisera la notation $\epsilon_{\vec{k}\sigma} = \frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B$.

Par la suite, on va travailler avec $K = H - \mu N$, où μ est le potentiel chimique (commun à tous les électrons).

4. $\rightarrow$ Décrire l'état fondamental du système.

5. $\rightarrow$ Trouver les vecteurs d'onde de Fermi $k_{F\sigma}$.

6. Déterminer les fonctions de Green ordonnées en temps $\tilde{G}_\sigma(\vec{k}, t)$.

7. Montrer que les fonctions de Green $\tilde{\tilde{G}}_\sigma(\vec{k}, \omega)$ sont données par

$$\tilde{\tilde{G}}_\sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - (\frac{k^2}{2m} - \sigma\mu_B B - \mu) + i\eta\,\mathrm{sign}(|\vec{k}| - k_{F\sigma})}.$$

L'aimantation locale du système est définie comme

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{g\mu_B}{2} \sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \langle \psi^\dagger_\alpha(\vec{r}, t) \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{r}, t) \rangle.$$

Nous allons la calculer dans l'état fondamental du système. (Voir question 4.)

8. $\rightarrow$ Argumenter pourquoi l'aimantation globale pour le cas considéré ici est donnée par

$$\vec{M} = \mu_B \sum_{\vec{k}} \langle c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow} - c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\downarrow} \rangle \vec{u}_z.$$

9. Calculer l'aimantation.

10. $\rightarrow$ Décrire comment obtenir le résultat ci-dessus en utilisant les fonctions de Green $G_\sigma(\vec{k}, t)$

Dans un deuxième temps, nous allons étudier l'effet d'un champ arbitraire en réponse linéaire. Cela nous permettra de déterminer l'aimantation au premier ordre en champ à partir de la susceptibilité de spin,

$$M_i(\vec{r},t) = -\frac{g^2\mu_B^2}{4}\int d^3r' \int dt'\ \chi^R_{ij}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')B_j(\vec{r}',t')$$

pour $i,j = x,y,z$**.**

11. $\rightarrow$ Utiliser la théorie de la réponse linéaire pour montrer que l'aimantation au 1er ordre en champ peut être obtenu à partir de la susceptibilité de spin

$$\chi^R_{ij}(\vec{r},t) = -i\theta(t)\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'=\uparrow,\downarrow}\langle[\psi^\dagger_\alpha(\vec{r},t)(\sigma_i)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\vec{r},t),\psi^\dagger_{\alpha'}(0,0)(\sigma_j)_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}(0,0)]\rangle_0.$$

Expliques les étapes.

On peut démontrer que la susceptibilité est diagonale, $\chi_{ij}(\vec{r},t) = \chi_{ii}(\vec{r},t)\delta_{ij}$.

12. $\rightarrow$ Argumenter pourquoi $\chi_{xx}(t) = \chi_{yy}(t) = \chi_{zz}(t)$.

En prenant la transformée de Fourier, il suffit donc de calculer

$$\tilde{\chi}^R_{zz}(\vec{q},t) = -i\theta(t)\sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow}\alpha\alpha'\langle[c^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t)c_{\vec{k}\alpha}(t),c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}'\alpha'}(0)c_{\vec{k}'\alpha'}(0)]\rangle_0.$$

On commencera par calculer

$$\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q},t) = -i\sum_{\vec{k},\vec{k}';\alpha,\alpha'=\uparrow,\downarrow}\alpha\alpha'\langle Tc^\dagger_{\vec{k}-\vec{q}\alpha}(t^+)c_{\vec{k}\alpha}(t^-)c^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q}'\alpha'}(0^+)c_{\vec{k}'\alpha'}(0^-)\rangle_0.$$

13. $\rightarrow$ Expliquer pourquoi la fonction de Green G^0_α ne dépend pas de α.

14. $\rightarrow$ Utiliser le théorème de Wick pour obtenir

$$\tilde{\chi}_{zz}(\vec{q},t) = -i\sum_{\vec{k};\alpha=\uparrow,\downarrow}\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k},t)\tilde{G}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},-t).$$

15. $\rightarrow$ La transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{\tilde{\chi}}_{zz}(\vec{q},\omega) = -i\sum_{\vec{k};\alpha=\uparrow,\downarrow}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k},\omega')\tilde{\tilde{G}}^0_\alpha(\vec{k}-\vec{q},\omega'-\omega).$$

Evaluer l'intégrale sur ω'.

16. Déduire $\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q},\omega)$ du résultat de la question précédente.

Pour comparer avec le résultat de la 1ère partie, on s'intéressera en particulier à $\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q}\rightarrow 0,0)$. (A noter : les limites $\vec{q}\rightarrow 0$ et $\vec{\omega}\rightarrow 0$ ne commuttent pas !)

17. Montrer que dans la limite continue on obtient

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q}\rightarrow 0,0) = \frac{L^3}{2\pi^2}\lim_{q\rightarrow 0}\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\left(\int_0^{k_F} - \int_0^{k_F+q\cos\theta}\right)dk\ \frac{mk}{q\cos\theta},$$

où la limite $\eta\rightarrow 0$ a déjà été prise et $\vec{k}\cdot\vec{q} = kq\cos\theta$.

18. $\rightarrow$ Démontrer le résultat final

$$\tilde{\tilde{\chi}}^R_{zz}(\vec{q} \rightarrow 0, 0) = \frac{mk_F L^3}{\pi^2}.$$

19. $\rightarrow$ Déterminer l'aimantation pour le cas $\vec{B}(\vec{r}, t) = B\vec{u}_z$ en utilisant la susceptibilité de spin.

20. Comparer le résultat obtenu en réponse linéaire avec le résultat exact de la question 9. Est-ce que la réponse linéaire donne le résultat exact ? Pourquoi ? Dans quelle limite est-ce une bonne approximation ?