

# Intégrales de chemin

Propagateur de  $q_i$  au temps  $t_i$  à  $q_f$  au temps  $t_f$  :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

1. découpage de l'intervalle :

$$e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} = \left( e^{-i\hat{H}\Delta t} \right)^N, \quad \Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$$

2. séparation énergie cinétique  $T(p)$  et potentielle  $V(q)$  :

$$e^{-i\hat{H}\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} e^{-i\hat{T}\Delta t} e^{-i\hat{V}\Delta t}$$

# Intégrales de chemin

Propagateur de  $q_i$  au temps  $t_i$  à  $q_f$  au temps  $t_f$  :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

3. utilisation des états propres de  $T$  et  $V$  :

$$\hat{T}|p_n\rangle = \frac{p_n^2}{2m}|p_n\rangle, \quad \hat{V}|q_n\rangle = V(q_n)|q_n\rangle$$

propriétés :  $1 = \int dq_n |q_n\rangle \langle q_n| = \int dp_n |p_n\rangle \langle p_n|$

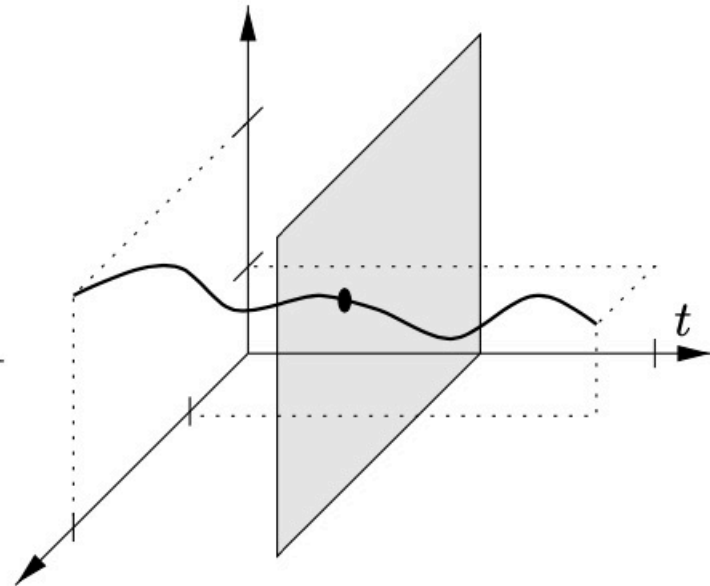
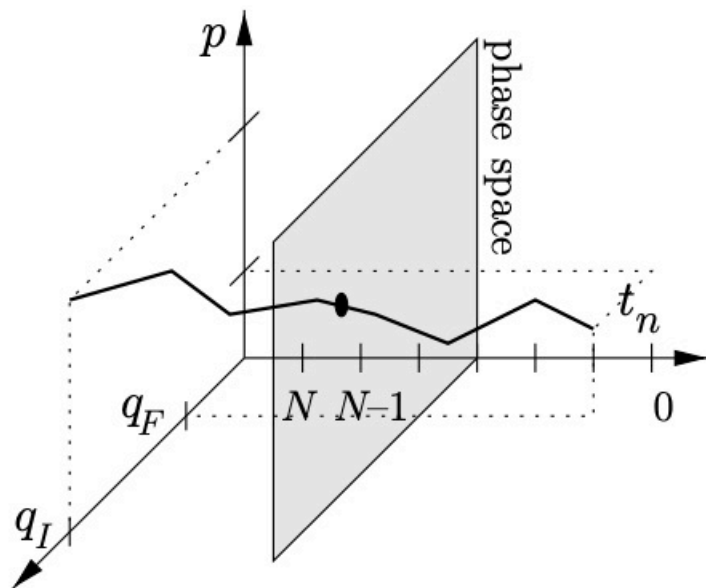
$$\langle q_n | p_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_n q_m}$$

# Intégrales de chemin

Propagateur de  $q_i$  au temps  $t_i$  à  $q_f$  au temps  $t_f$ :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle$$

$$= \int \prod_n \left( dq_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \exp \left[ -i\Delta t \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m} + V(q_{n-1}) - p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right) \right]$$



# Intégrales de chemin

Propagateur de  $q_i$  au temps  $t_i$  à  $q_f$  au temps  $t_f$ :

$$\begin{aligned} & \langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle \\ &= \int \prod_n \left( dq_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \exp \left[ -i\Delta t \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m} + V(q_{n-1}) - p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

4. limite continue :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right]$$

formulation **Hamiltonienne** de l'intégrale de chemin

# Intégrales de chemin

Propagateur de  $q_i$  au temps  $t_i$  à  $q_f$  au temps  $t_f$ :

$$\begin{aligned} & \langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle \\ &= \int \prod_n \left( dq_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \exp \left[ -i\Delta t \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m} + V(q_{n-1}) - p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

5. intégration sur  $p$  :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right]$$

formulation **Lagrangienne** de l'intégrale de chemin