Intégrales de chemin

Propagateur de q_i au temps t_i à q_f au temps t_f :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

1. découpage de l'intervalle :

$$e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} = \left(e^{-i\hat{H}\Delta t} \right)^N , \quad \Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$$

2. séparation énergie cinétique $T(p)$ et potentielle $V(q)$:

$$e^{-i\hat{H}\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} e^{-i\hat{T}\Delta t} e^{-i\hat{V}\Delta t}$$

Intégrales de chemin

Propagateur de q_i au temps t_i à q_f au temps t_f :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

3. utilisation des états propres de T et V :

$$\hat{T}|p_n\rangle = \frac{p_n^2}{2m}|p_n\rangle, \qquad \hat{V}|q_n\rangle = V(q_n)|q_n\rangle$$

propriétés : $1 = \int dq_n |q_n\rangle\langle q_n| = \int dp_n |p_n\rangle\langle p_n|$

$$\langle q_n | p_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_n q_m}$$

Intégrales de chemin

Propagateur de q_i au temps t_i à q_f au temps t_f :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

$$= \int \prod_n \left(dq_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \exp \left[-i \Delta t \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2m} + V(q_{n-1}) - p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right) \right]$$

4. limite continue :

$$\boxed{\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i) = q_i \\ q(t_f) = q_f}} \mathcal{D}q \, \mathcal{D}p \, \exp \left[-i \int_{t_i}^{t_f} dt \, \left(p\dot{q} - H(q,p) \right) \right]}$$

formulation **Hamiltonienne** de l'intégrale de chemin

Intégrales de chemin

Propagateur de q_i au temps t_i à q_f au temps t_f :

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

$$= \int \prod_n \left(dq_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \exp \left[-i\Delta t \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2m} + V(q_{n-1}) - p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right) \right]$$

5. intégration sur p :

$$\boxed{\langle q_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i \rangle = \int_{\substack{q(t_i)=q_i \\ q(t_f)=q_f}} \mathcal{D}q \; \exp \left[-i \int_{t_i}^{t_f} dt \; L(q, \dot{q}) \right]}$$

formulation **Lagrangienne** de l'intégrale de chemin

Intégrales de chemin

Limite classique :

- $\hbar \to 0$
- $\to$ action stationnaire $\delta S = 0 \;\to\;$ Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\rm cl}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\rm cl}} = 0$$

$$\to m\ddot{q}_{\rm cl} = -\frac{\partial V}{\partial q_{\rm cl}}$$

Approximation semiclassique :

+ fluctuations autour de la trajectoire classique

Pour plus de détails voir, par exemple, Altland & Simons, ch. 3.