Fonctions de Green – Contexte

exemple : oscillateur harmonique amorti forcé

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (1)$$

fonction de Green $G(t,t')$ déterminée par

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t,t') + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} G(t,t') + \omega_0^2 G(t,t') = \delta(t-t') \qquad (2)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; G(t,t') f(t')$$

est une solution particulière de l'équation (1) :

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x$$

$$= \int dt' \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} G + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} G + \omega_0^2 G \right] f(t')$$

$$= \int dt' \; \delta(t-t') f(t') = f(t)$$

parce que le système possède une invariance par translation temporelle, $G(t,t')$ dépend de $t-t'$ seulement

transformée de Fourier :

$$\tilde{G}(\omega) = \int d(t-t') \, e^{i\omega(t-t')} \, G(t-t')$$

et $-\omega^2 \tilde{G} - 2i\alpha\omega \tilde{G} + \omega_0^2 \tilde{G} = 1$