TD 5 : Théorie de Ginzburg-Landau – 19 mars 2020

1 Saut de phase dans un fil supraconducteur.

Dans ce problème nous étudierons la suppression de la densité supraconductrice dans un fil supraconducteur. Nous verrons que cette suppression est accompagnée d'un changement de la phase supraconductrice, appelé "saut de phase". Ces phénomènes couplés peuvent être analysés à l'aide de la théorie de Ginzburg-Landau (GL). Soit l'énergie libre d'un supraconducteur par unité de volume

$$f_S = f_{n0} + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2.$$

1. Discuter de la signification physique des différents termes dans cette expression. Quelles sont les valeurs possibles de α et de β ? Comment ces paramètres varient-ils avec la température ?

> **Solution:**
> Le paramètre β doit être positif. Le paramètre α change de signe à la température critique : $\alpha > 0$ correspond à la phase normale, tandis que $\alpha < 0$ correspond à la phase supraconductrice. On peut approximer $\beta = cste$ et $\alpha(T) = \tilde{\alpha} \times (T/T_c - 1)$.

2. Minimiser la différence d'énergie libre $f_S - f_{n0}$ en l'absence de gradients et trouver la valeur absolue $|\psi|$ correspondant. On note cette valeur ψ_∞.

> **Solution:** Pour le cas homogène (pas de gradients),
>
> $$f_S - f_{n0} = \alpha\psi^*\psi + \frac{\beta}{2}\psi^{*2}\psi^2.$$
>
> On peut varier ψ et ψ^* séparément :
>
> $$\begin{aligned} \delta(f_S - f_{n0}) &= (\alpha\psi^* + \beta\psi^{*2}\psi)\delta\psi + (\alpha\psi + \beta\psi^*\psi^2)\delta\psi^* \\ &= (\alpha + \beta|\psi|^2)\psi^*(\Re\delta\psi + i\Im\delta\psi) + (\alpha + \beta|\psi|^2)\psi(\Re\delta\psi - i\Im\delta\psi) \\ &= (\alpha + \beta|\psi|^2)(\psi^* + \psi)\Re\delta\psi + i(\alpha + \beta|\psi|^2)(\psi^* - \psi)\Im\delta\psi. \end{aligned}$$
>
> On obtient le même résultat qu'en prenant $\Re\psi$ et $\Im\psi$ comme indépendants. En particulier,
>
> $$(\alpha + \beta|\psi|^2)\psi = (\alpha + \beta|\psi|^2)\psi^* = 0.$$
>
> On remarque qu'une des deux équations est suffisante. Donc
>
> $$\psi = 0, \qquad \text{ou} \qquad |\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$
>
> La solution $|\psi| = \sqrt{-\alpha/\beta} = \psi_\infty$ existe pour $\alpha < 0$. Dans ce cas, $f_S(\psi_\infty) - f_{n0} = -\alpha^2/(2\beta) < f_S(0) - f_{n0}$.

3. Minimiser la différence d'énergie libre totale

$$F = \int\limits_V d^3r(f_S - f_{n0}) = \int\limits_V d^3r \left(\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2 \right),$$

où V est le volume de l'échantillon, et trouver l'équation différentielle de GL,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0.$$

Conseil : varier le paramètre d'ordre $\psi + \delta\psi$, $\psi^* + \delta\psi^*$ et trouver la condition sous laquelle la variation de F est au moins d'ordre deux en $\delta\psi$, $\delta\psi^*$.

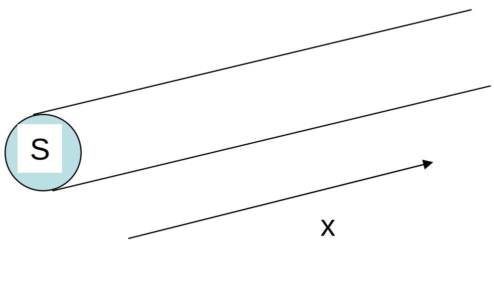
Solution: Dans ce cas, on obtient

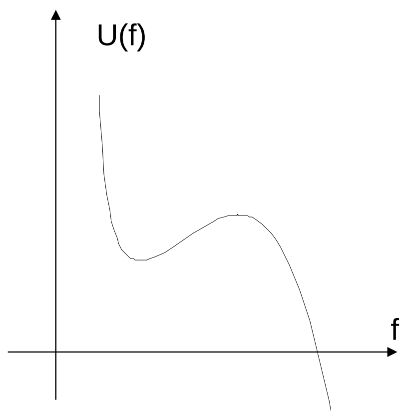
$$\begin{aligned}
\delta F &= \int\limits_V d^3r \left((\alpha + \beta|\psi|^2)(\psi^*\delta\psi + \psi\delta\psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla\psi^*\nabla\delta\psi + \frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla\psi\nabla\delta\psi^* \right) \\
&= \int\limits_V d^3r \left((\alpha + \beta|\psi|^2)(\psi^*\delta\psi + \psi\delta\psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi^*\delta\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi\delta\psi^* \right) \\
&= \int\limits_V d^3r \left[\left((\alpha + \beta|\psi|^2)\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi^* \right)\delta\psi + \left((\alpha + \beta|\psi|^2)\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi \right)\delta\psi^* \right].
\end{aligned}$$

A nouveau, une équation suffit. La variation par rapport à ψ^* donne

$$(\alpha + \beta|\psi|^2)\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi = 0.$$

Nous considérons un fil supraconductor de longueur infinie et de section S, voir la figure.





4. Quelle est la dimension du paramètre $\xi^2 = -\hbar^2/2m^*\alpha$? Sous quelle(s) condition(s) l'équation différentielle de GL qui décrit le fil prend-elle la forme unidimensionnelle

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}d^2\psi/dx^2 + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0?$$

Solution: On trouve

$$[\xi^2] = \frac{[\hbar]^2}{[m][\alpha]} = \frac{(Et)^2}{(Et^2/L^2)E} = L^2.$$

ξ donne l'échelle caractéristique de variation de ψ. Si on remplace $\vec{r} \to \vec{s} = \vec{r}/\xi$, l'équation prend la forme

$$\Delta\psi + \psi + \frac{\beta}{\alpha}|\psi|^2\psi = 0.$$

Si le diamètre du fil est plus petit que cette longueur, $d = 2\sqrt{S/\pi} \ll \xi$, les variations de ψ dans les directions transverses peuvent être négligés et ψ dépend de x seulement. Dans ce cas, on obtient l'équation donnée ci-dessus.

5. Soit $\psi(x) = |\psi(x)|e^{i\phi(x)}$, où $|\psi|^2$ est la densité supraconductrice et ϕ la phase supraconductrice. Introduire $f = |\psi|/\psi_\infty$ et $s = x/\xi$.
A l'aide de l'équation différentielle de GL unidimensionnelle, montrer que

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(fe^{i\phi}\right) + fe^{i\phi} - f^3e^{i\phi} = 0.$$

En déduire que

$$f" - \phi'^2 f + f - f^3 = 0 \qquad (1)$$
$$2\phi' f' + \phi" f = 0, \qquad (2)$$

où $f' = df/ds$, etc.

Solution: On a déjà trouvé l'ǵquation en faisant la substitution $x \to s = x/\xi$, ci-dessus :

$$\frac{d^2}{ds^2}\psi + \psi + \frac{\beta}{\alpha}|\psi|^2\psi = 0.$$

Avec $\psi = \psi_\infty f e^{i\phi}$, on obtient

$$\psi_\infty \frac{d^2}{ds^2}(fe^{i\phi}) + \psi_\infty f e^{i\phi} + \psi_\infty^3 \frac{\beta}{\alpha} f^3 e^{i\phi} = 0.$$

Comme $\psi_\infty^2 \beta/\alpha = -1$, cela donne

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2}{ds^2}(fe^{i\phi}) + fe^{i\phi} - f^3e^{i\phi} \\
&= \frac{d}{ds}\left(f'e^{i\phi} + if\phi'e^{i\phi}\right) + fe^{i\phi} - f^3e^{i\phi} \\
&= f"e^{i\phi} + 2if'\phi'e^{i\phi} + if\phi"e^{i\phi} - f\phi'^2e^{i\phi} + fe^{i\phi} - f^3e^{i\phi} \\
&= \left[f" - f\phi'^2 + f - f^3 + i\left(2f'\phi' + f\phi"\right)\right]e^{i\phi}.
\end{aligned}$$

Les parties réelles et imaginaires de l'expression entre crochets doivent être nulles. Donc on obtient les équations données dans l'énoncé.

6. Montrer que (2) implique que $\phi' = C/f^2$. En déduire que

$$f" = C^2/f^3 - f + f^3. \qquad (3)$$

Solution: L'équation $2\phi' f' + \phi" f = 0$ peut être réécrite de la faÁon suivante :

$$\frac{\phi"}{\phi'} = -2\frac{f'}{f} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{ds}\ln\phi' = -2\frac{d}{ds}\ln f = \frac{d}{ds}\ln\frac{1}{f^2}.$$

Donc $\phi' = C/f^2$. En substituant cette relation dans l'autre équation, on trouve l'équation indiquée.

7. Soit $U(f)$ tel que $f" = -dU/df$. Trouver U et vérifier que sa forme correspond à celle donnée dans la figure.

Solution: Selon l'équation donnée ci-dessus,

$$-dU/df = C^2/f^3 - f + f^3 = -\frac{d}{df}\left(\frac{C^2}{2f^2} + \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{4}f^4 + cste\right),$$

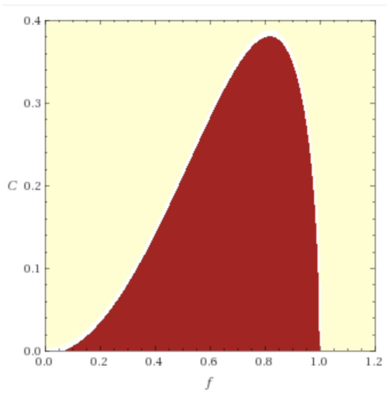
et donc

$$U(f) = \frac{C^2}{2f^2} + \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{4}f^4 + cste.$$

Pour $f \to 0$, on a $U(f) \to \infty$, et, pour $f \to \infty$, on a $U(f) \to -\infty$. Pour obtenir un minimum et un maximum local, il faut

$$C^2 - f^4 + f^6 = 0.$$

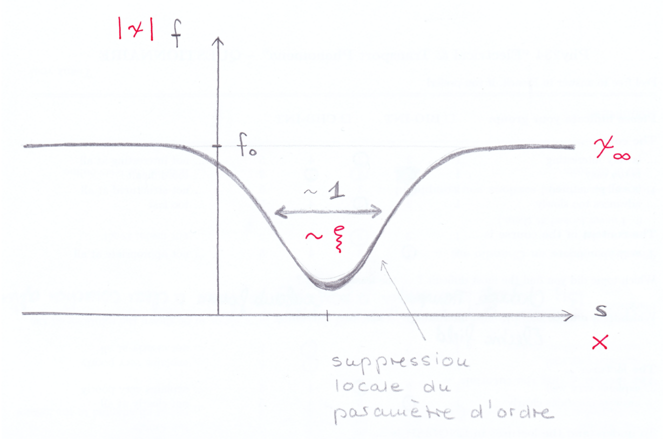
Ci-dessous un tracé des courbes de niveau du signe de $C^2 - f^4 + f^6$. On voit que pour C suffisamment petit, il y a 2 changements de signe en fonction de f, ce qui donne bien le comportement de $U(f)$ montré dans la figure.



On interprète (3) comme l'équation de mouvement d'une particule fictive de masse 1 et de coordonnée f, en fonction du temps s. Soit la particule située sur le maximum local au temps $s = -\infty$. Puis elle fait un aller-retour au travers du minimum pour se retrouver au maximum au temps $s = \infty$.

8. Faire un schéma de $f(s)$ pour cette trajectoire. Faire un schéma de $|\psi(x)|$ le long du fil. Discuter du résultat.

Solution: Comme l'équation pour $f(s)$ est adimensionnée, la variation se fait sur une longueur d'ordre 1, tandis que $|\psi|(x)$ varie sur une longueur d'ordre ξ. Le paramètre d'ordre est diminué localement. Pour $x \to \pm\infty$, il tend vers la valuer ψ_∞. Cette configuration a une énergie plus grande que la configuartion homogène.



9. Faire un schéma de $\phi'(s)$ ainsi que de $\phi(s)$ et de $\phi(x)$. Pourquoi parle-t-on d'un "saut de phase" ? Sur quelle échelle spatiale se produit-il ?

Solution: La variation de la phase $\phi'(s)$ est maximale à l'endroit où l'amplitude du paramètre d'ordre $|\psi|$ est minimal. Donc a phase varie lentement partout sauf à cet endroit, où elle "saute". L'échelle spatiale est la même que pour la suppression de $|\psi|$, c'est-à-dire, la longueur de cohérence ξ.