Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistère : Théorie des champs classiques
http ://www.pheliqs.fr/Lists/StaticFiles/Julia-S-Meyer/Teaching/tcc.html

TD 4 : Mécanique relativiste, champ électromagnétique – 17 février 2020

1) La dilatation du temps.

Dans ce problème nous allons étudier le phénoméne de la dilatation du temps, tout en tenant compte des accélérations subises par la particule pendant le mouvement. L'équation de mouvement d'une particule sur laquelle agit une force $\vec{F}$ s'écrit $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement. Soit le quadri-vecteur $g^i = dp^i/ds$, où g^i est la quadri force et $p^i = mcu^i$ la quadri-impulsion ($u^i = dx^i/ds$).

a) Démontrer que

$$g^i = \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

On considére une particule de masse m au repos à l'origine d'un référentiel K. Soit K' le référentiel instantané associé à la particule. Au temps $t = 0$ une force commence à agir sur la particule dans la direction $+x$. Cette force est constante dans K, sa magnitude est de ma. Aprés un temps t_1 (dans K) la force change signe, c.à.d. elle devient $-ma$. La position de la particule est alors x_1. Quand la particule passe x_1 de nouveau, la force change encore une fois de signe et devient ma. La particule finit par être au repos à l'origine de K. Nous voulons comparer la durée de ce voyage selon K à la durée mesurée dans K', c.à.d. selon le temps propre de la particule. Nous utiliserons les grandeurs suivantes sans dimension :

$$\text{temps : } T = at/c; \text{ position : } X = ax/c^2; \text{ vitesse : } dX/dT = dx/cdt = v/c. \tag{1}$$

b) Déterminer la vitesse de la particule dans K pour $0 < T < T_1$ et pour $T_1 < T < 2T_1$.

c) Déterminer la position X de la particule dans K pour $0 < T < T_1$. Faire un schéma de la ligne d'univers dans un diagramme (T, X). Mettre dans le mÍme diagramme la ligne d'univers selon la mécanique classique.

d) Soit τ le temps propre de la particule et $\mathcal{T} = a\tau/c$ la même grandeur sans dimension. Déterminer la durée $\mathcal{T}_1$ selon K' entre le début du mouvement et le premier changement de la force (utiliser la relation $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$). En déduire la relation entre $\mathcal{T}_1$ et T_1 ainsi que la relation entre la durée totale du voyage selon K et K' : $\mathcal{T}_{\text{tot}} = 4\ln\{T_{\text{tot}}/4 + \sqrt{1+(T_{\text{tot}}/4)^2}\}$.

e) Afin d'avoir une idée sur l'importance de cet effet, nous étudierons une application numérique. Soit $a = 9,50\ m/s^2$, soit à peu prés l'accélération de la pesanteur. Avec $c = 3,00\cdot 10^8$ m/s et 1 an $= 3,16\cdot 10^7$ s on trouve : si $t = 1$ an alors $T \simeq 1$, si $x = 1$ année lumiére alors $X \simeq 1$. Remplir le tableau suivant :

T_{tot}	T_1	$\sqrt{1+T_1^2}$	déplacement maximal $2X_1$	$v_{\max}/c$	$\mathcal{T}_{\text{tot}}$	$\mathcal{T}_{\text{tot}}/T_{\text{tot}}$
1 an	1/4	1,03	0,06	0,24	0,99	0,99
4 ans						
40 ans						
40000 ans						

2) La transformation de Lorentz.

Un quadri-vecteur A^i transforme selon la transformation de Lorentz comme

$$A^0 = \frac{A'^0 + (v/c)A'^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\ A^1 = \frac{A'^1 + (v/c)A'^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ,\ A^2 = A'^2\ ,\ A^3 = A'^3.$$

Un quadri-tenseur de rang 2 est constitué de 16 éléments A^{ik} qui transforment comme le produit de deux quadri-vecteurs. Le quadri-tenseur unité est défini tel que $\delta^k{}_i A^i = A^k$. Les quadri-tenseurs de rang 2 peuvent être représentés par des matrices.

a) Ecrire la transformation de Lorentz sous la forme $A^i = (\Lambda^{-1})^i{}_j A'^j$ et déterminer la forme matricielle du tenseur $(\Lambda^{-1})^i{}_j$.

b) Noter $A'^i = \Lambda^i{}_j A^j$ et déterminer la forme matricielle de $\Lambda^i{}_j$.

c) Montrer que $(\Lambda^{-1})^i{}_j = \Lambda_i{}^j$.

d) Trouver la forme matricielle du quadri-tenseur unité $\delta^k{}_i$.

e) Calculer δ_{ki} et δ^{ki}. Montrer que $\delta_{ki} = \delta^{ki}$ ainsi que $A_i = \delta_{ik} A^k$ et $A^i = \delta^{ik} A_k$.

f) Montrer que $A'^{ik} = \Lambda^i{}_l \Lambda^k{}_m A^{lm}$.

g) Soient deux quadri-vecteurs A_i et B^i. Calculer le produit scalaire $A'_i B'^i$ et montrer que $A'_i B'^i = A_i B^i$.

Les invariants d'un quadri-tenseur $A^i{}_j$ peuvent être obtenus de façon systématique à partir de l'équation caractéristique. Soient λ et A^k respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur $A^i{}_j$.

h) Rappeler que, si $A^i{}_j A^j = \lambda A^i$, alors $\det(A^i{}_j - \lambda \delta^i{}_j) = 0$. Montrer que $\det(A'^i{}_j - \lambda \delta^i{}_j) = \det(A^i{}_j - \lambda \delta^i{}_j)$. En déduire que les coefficients a_n de l'équation caractéristique $a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ sont les invariants recherchés.

3) Invariants du tenseur électromagnétique.

Soient λ et A^i respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du quadri-tenseur électromagnétique $F^i{}_k$. Donner la forme matricielle de $F^i{}_k$, puis trouver l'équation caractéristique sous la forme $\sum_{n=0}^{4} a_n \lambda^n = 0$. Préciser les constantes a_n, ce sont les invariants recherchés.

4) Transformation de Lorentz et tenseur électromagnétique.

On étudie l'effet d'une transformation de Lorentz sur le quadri-tenseur électromagnétique F^{ik}.

a) Calculer $F'^{ik} = \Lambda^i{}_l \Lambda^k{}_m F^{lm}$.

b) Mettre le résultat sous la forme $F'^{ik} = (-\vec{E}', \vec{B}')$ et déterminer les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$.

c) Calculer $\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2$ et $\vec{E}' \cdot \vec{B}'$. Conclusion ?

5) Les équations de Maxwell.

Une action alternative pour décrire le champ électromagnétique est donnée par

$$S_a = \int \mathcal{L}_a d\Omega \quad \text{où} \quad \mathcal{L}_a = -\frac{1}{8\pi c}\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2} j_k A^k.$$

a) Trouver les équations de mouvement pour le champ A^i. Sont-elles les équations de Maxwell ? Sous quelles conditions ?

b) La quadri-divergence d'un quadri-vecteur D^i est définie comme $\partial D^i/\partial x^i = \partial D^0/\partial x^0 + \text{div}\ \vec{D}$. Démontrer explicitement (et sous quelles conditions) que la différence entre $\mathcal{L}_a$ et la densité Lagrangienne proposée en cours

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{16\pi c} F^{ik} F_{ik} - \frac{1}{c^2} j_k A^k$$

est une quadri-divergence. La quadri-divergence ajoutée, affecte-t-elle l'action et les équations de mouvement ?