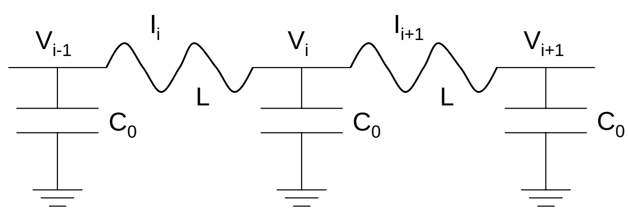
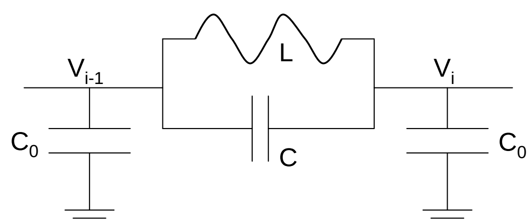
Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)

TD 3 : Limite continue, ondes solitaires – 3 février 2020

1) Ligne de transmission LC.

Cet exercice propose d'étudier la relation de dispersion des ondes propagatives dans une ligne de transmission composée d'inductances et de capacités (voir la figure 1 du haut).





a) Rappeller l'expression de la charge Q et du courant $I = \dot{Q}$ au travers d'une capacité C_0, en fonction du temps t ainsi qu'en fonction de la fréquence ω.

b) Même question pour l'expression de la tension V aux bornes d'une inductance L en fonction du courant I.

c) Exprimer les courant I_i et I_{i+1} au travers des inductances L en fonction des tensions V_i et V_{i-1} et V_{i+1}.

d) Montrer que la loi de Kirchhoff pour le noeud i amène à l'équation :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = -\omega^2 L C_0 V_i \tag{1}$$

e) Montrer qu'à la limite continue l'équation de propagation des ondes de tension est décrite par l'équation :

$$c^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

où $c^2 = a^2/(LC_0)$. Ici a est le pas du réseau. Donner la signification physique de c.

f) Montrer que la relation de dispersion des ondes propagatives $V(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ dans la ligne de transmission est donnée par $c^2k^2 = \omega^2$.

g) On ajoute une capacité C en parallele à l'inductance L (voir la figure 1 du bas). En faisant une argumentation similaire aux questions c) et d) montrer que la loi de Kirchoff devient :

$$V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i = -\frac{\omega^2 L C_0}{1 - \omega^2 LC} V_i. \tag{3}$$

h) Prendre la limite continue et montrer que

$$\frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

où $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

i) Trouver la nouvelle relation de dispersion. Tracer $\omega(k)$. Discuter des limites $k = 0$ et $k \to \propto$. Montrer que le vecteur d'onde k^* qui sépare ces deux régimes est donné par $k^* a = \sqrt{C_0/C}$.

2) Ondes solitaires dans une jonction Josephson longue.

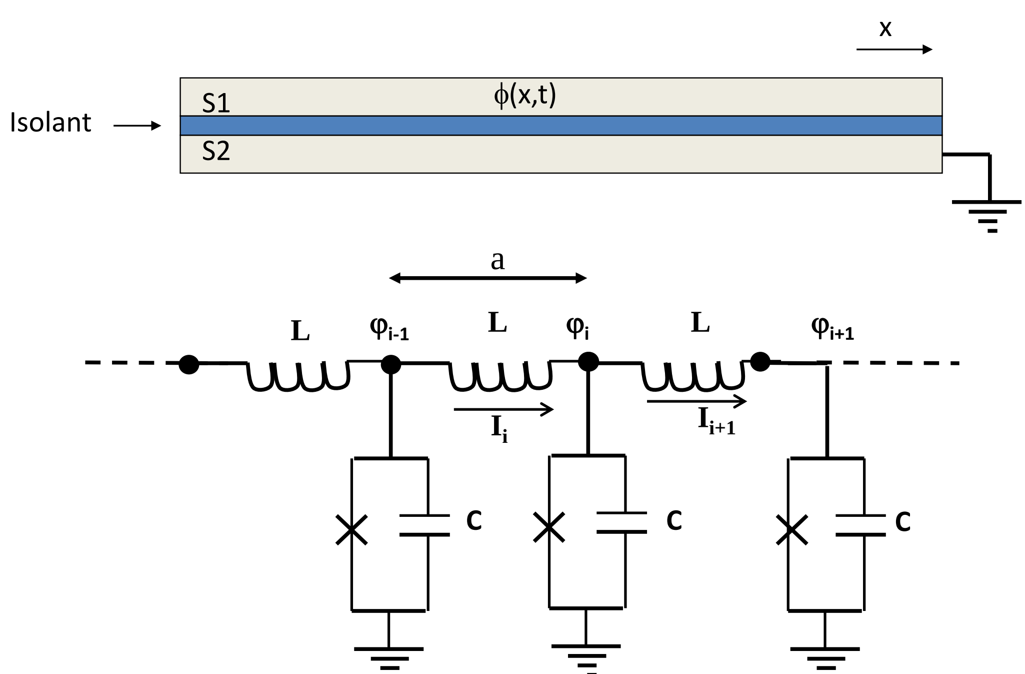
Une jonction Josephson longue (voire la figure 2 du haut) comprend deux électrodes supraconductrices S1 et S2 séparées d'une couche mince isolante. L'état fondamental d'un supraconducteur est décrit par la fonction d'onde $\psi = |\psi| e^{i\varphi(x,t)}$. Cette fonction macroscopique décrit le comportement des paires de Cooper (des états liés de deux électrons) qui sont les porteurs de charge. Une importante propriété de la supraconductivité est la conductivité parfaite, c'est-à-dire un courant électrique DC traversant le supraconducteur (porté par les paires de Cooper) ne crée pas de dissipation. Un tel supercourant peut traverser également une jonction Josephson grace à l'effet tunnel des paires de Cooper. Le courant I est une fonction de la différence de phase aux bornes de cette jonction $\Delta\phi$:

$$I = I_c \sin(\Delta\varphi).$$

De plus, il existe une relation entre la tension V et la phase ϕ d'une élément supraconducteur

$$V = \frac{\hbar}{2e}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{5}$$

Ces deux résultats sont dus à Brian Josephson (prix Nobel en 1973).
La jonction longue peut Ítre modélisée par le circuit électrique supraconducteur donné sur la figure 2 du bas. Dans ce schéma les inductances L représentent l'inductance cinétique du supraconducteur. Les croix correspondent aux élements Josephson $I = I_c \sin(\varphi)$ et les capacités C modélisent les effets capacitives entre les deux électrodes supraconductrices. Pour les éléments mis à la masse on a $V = 0$, et l'on choisit $\phi = 0$ (liberté de choix de jauge).



a) Montrer que la loi de Kirchhoff pour le noeud i s'écrit :

$$\frac{\hbar}{2e}\frac{1}{L}\left[\varphi_i-\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}+\varphi_i\right]+I_c\sin\left(\varphi_i\right)+\frac{\hbar}{2e}C\frac{d^2\varphi_i}{dt^2}=0 \tag{6}$$

(Conseil : Justifier que le courant au travers de la capacité s'exprime $I_{c,i}=\frac{\hbar}{2e}C\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et au travers de l'inductance $I_{L,i}=\frac{\hbar}{2e}\frac{1}{L}\left(\varphi_{i-1}-\varphi_i\right)$.)

b) Prendre la limite continue et montrer que :

$$-\lambda_J^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\sin\varphi+\frac{1}{\omega_p^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{7}$$

Préciser les constantes λ_J et ω_p. Donner leur signification physique. Que se passe-t-il quand le courant Josephson est absent (absence du terme $\sin\varphi=0$) ? Dans le dernier cas, quelles sont les solutions possibles et à quelle vitesse c se propagent-elles ?

c) Introduire les variables sans dimension $\xi=x/\lambda_J$ et $\tau=\omega_p t$ et montrer que l'équation (7) devient l'équation de sinus-Gordon :

$$\varphi_{\tau\tau}+\sin\varphi-\varphi_{\xi\xi}=0 \tag{8}$$

d) On cherche une solution telle que $\varphi\left(\xi,\tau\right)=f\left(\xi-v\tau\right)=f\left(y\right)$ où v est une vitesse quelconque sans dimension. Montrer que f vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{1}{1-v^2}\sin f \tag{9}$$

e) En effectuant le changement de variables $u=\frac{y}{\sqrt{1-v^2}}$ montrer que $f\left(u\right)=4\arctan\left(e^u\right)$ est une solution de l'équation sinus-Gordon.

f) Tracer $f(y)$. Interpréter ce résultat dans le cadre d'une analyse de l'Eq. (9) en tant qu'équation de mouvement d'une particule fictive de masse 1, de position f en fonction du temps y se déplaçant dans un potentiel $U(f)$.

g) Exprimer cette solution en termes des variables x et t et montrer que cette solution s'écrit :

$$\varphi\left(x,t\right)=4\arctan\left(\exp\left(\frac{x-u_0t}{\lambda_J\sqrt{1-\left(u_0/c\right)^2}}\right)\right). \tag{10}$$

Ici $u_0=vc$ avec c la vitesse qui a été trouvée dans la partie b).

h) Tracer cette solution en fonction de x pour un temps t donné et discuter de son évolution temporelle.

i) Comparer la forme de l'onde solitaire pour une vitesse faible ($u_0\ll c$) à celle obtenue pour $u_0\simeq c$. Quel phénomène relativiste observe-t-on ?