Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistére

TD 3 : Limite continue, ondes solitaires – 14 mars 2019
CORRECTION

1) Ondes solitaires dans une jonction Josephson longue.

L'équation du mouvement prend la forme

$$\frac{1}{\omega_p^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \lambda_J^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \sin\varphi = 0$$

avec $\omega_p = \sqrt{2eI_c/\hbar C}$ et $\lambda_J = a\sqrt{\hbar/2eI_C L}$.

ONDES PLANES :
Pour $\varphi = 2\pi n + \delta\varphi$ avec $|\delta\varphi| \ll 1$, on peut linéariser l'équation :

$$\frac{1}{\omega_p^2}\delta\varphi_{tt} - \lambda_J^2\delta\varphi_{xx} + \delta\varphi = 0.$$

Dans ce cas, les solutions prennent la forme $\delta\varphi \sim \exp[i(kx - \omega t)]$ avec

$$\omega = \omega_p\sqrt{\lambda_J^2 k^2 + 1}.$$

Pour $k \to 0$, on obtient $\omega \to \omega_p$, la "fréquence plasma" de la jonction. Pour $k \gg \lambda_J$, on obtient

$$\omega \approx \omega_p\lambda_J|k| = \frac{a}{\sqrt{LC}}|k|,$$

comme pour une ligne de transmission (voir TD2). Les vitesses de groupe et de phase sont données par

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_J\lambda_J^2 k}{\sqrt{\lambda_J^2k^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{LC}}\frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_J k)^{-2}}} \leq \frac{a}{\sqrt{LC}}, \\ v_p &= \frac{\omega}{k} = \frac{a}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+(\lambda_J k)^{-2}} \geq \frac{a}{\sqrt{LC}}. \end{aligned}$$

SOLITONS :
On cherchera par la suite des solutions de l'équation non-linéaire qui se propagent à vitesse constante sans déformation. Dans ce cas, l'équation pour la phase $\varphi(x,t)$ peut s'écrire sous la form

$$f'' = \sin f \quad \text{avec} \quad \varphi(x,t) = f(u) \quad \text{où} \quad u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{x}{\lambda_J} - v\omega_p t\right).$$

En outre,

$$V = \frac{\hbar}{2e}\dot\varphi = -\frac{\hbar}{2e}\frac{v\omega_p}{\sqrt{1-v^2}}f'.$$

L'équation pour la phase peut être interprêtée comme l'équation du mouvement d'une particule fictive de masse 1 dans un potentiel $U(f)$ tel que $-\partial_f U(f) = \sin f$, donc

$$U(f) = \cos f \ \ (+\text{cste}).$$

En intégrant l'équation du mouvement, on obtient

$$\begin{aligned} f''f' &= \sin f f' \\ \frac{1}{2}\frac{d}{du}(f')^2 &= -\frac{d}{du}\cos f \\ \frac{d}{du}\left\{\frac{1}{2}(f')^2 + \cos f\right\} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(f')^2 + \cos f = E = \text{cste}. \end{aligned}$$

La constante E dans la dernière équation correspond à l'énergie mécanique de la particule fictive, c.a.d., la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
On peut distinguer 4 cas différents :

- $E < -1$: Il n'y a pas de solution pour u, f réels.
- $-1 \leq E < 1$: La solution oscille autour d'un des minima du potentiel. Pour $E+1 \ll 1$, on peut approximer $f = \pi + \delta f$ et

$$\delta f'' = -\delta f \qquad \Rightarrow \qquad \delta f(u) = \sqrt{E+1}\cos(u+\phi_0).$$

  Il s'agit donc d'ondes planes avec

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}\,\lambda_J} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{v\omega_p}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- $E = 1$: C'est la solution qui nous intéresse. Dans ce cas

$$(f')^2 = 2(1-\cos f) = 4\sin^2\frac{f}{2}.$$

  Donc

$$\begin{aligned} du &= \pm\frac{df}{2\sin\frac{f}{2}} = \pm\frac{df}{4\sin\frac{f}{4}\cos\frac{f}{4}} = \pm\frac{d\frac{f}{4}}{\tan\frac{f}{4}\cos^2\frac{f}{4}} = \pm\frac{d\frac{f}{4}}{\tan\frac{f}{4}}\frac{d\tan\frac{f}{4}}{d\frac{f}{4}} = \pm d\frac{f}{4}\frac{d\ln(\tan\frac{f}{4})}{d\frac{f}{4}} \\ &= \pm d\ln(\tan\frac{f}{4}) \end{aligned}$$

  et

$$f(u) = 4\arctan\{\exp[\pm(u-u_0)]\} \quad (+2\pi n).$$

  Pour le signe $+$, cette solution change de zero à $u \to -\infty$ à 2π à $u \to -\infty$ (soliton). Pour le signe $-$, elle change de 2π à $u \to -\infty$ à zero à $u \to -\infty$ (anti-soliton). A $u = u_0$, f prend la valeur π avec une pente $f'(u_0) = \pm 2$.
  Pour la tension, on obtient

$$V = \frac{\hbar}{2e}\dot{\varphi} = \mp\frac{\hbar}{e}\frac{v\omega_p}{\sqrt{1-v^2}}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{x}{\lambda_J} - v\omega_p t\right) - u_0\right].$$

  Cela correspond à un pic de tension de largeur $\sim \sqrt{1-v^2}\,\lambda_J$ qui se déplace avec une vitesse $v_p = v\omega_p\lambda_J = va/\sqrt{LC} < a/\sqrt{LC}$.
- $E > 1$: La solution croît ou décroît de façon monotone. Pour $E \gg 1$, on peut négliger l'énergie potentielle et on trouve

$$f'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f = \sqrt{2E}\,u + f_0.$$

Quelques remarques sur les autres solutions :

1. Tandis que la solution pour $E+1 \ll 1$ donnée ci-dessus n'est généralement pas compatible avec les conditions aux bords, on trouve des solutions de type onde planes qui correspondent à des vitesses $v > 1$ et donc des u imaginaires (voir p. 1).
2. La solution pour $E \gg 1$ correspond à une tension constante à travers la jonction,

$$V = -\frac{\hbar}{2e}\frac{v\omega_p}{\sqrt{1-v^2}}\sqrt{2E}.$$

   Si la solution est compatible avec les conditions aux bords, c'est le même résultat comme pour une ligne de transmission. Tenant compte du potentiel dans le regime $E > 1$ donne une tension qui dépend du temps, mais toujours avec $\langle V\rangle \neq 0$.