Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistère : Théorie des champs classiques
http ://www.pheliqs.fr/Lists/StaticFiles/Julia-S-Meyer/Teaching/tcc.html

TD 2 : Extrémum sous contrainte, mécanique non-relativiste
27 janvier 2020

1) Multiplicateurs de Lagrange pour l'extrémalisation d'une fonction sous contrainte.

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$.

a) Trouver les extréma de la fonction.

b) Chercher les extréma e_i de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. [Conseil : tracer dans le plan (x,y) les contours de $f(x,y) = cte$, ainsi que le contour qui correspond à la contrainte $g(x,y) = 1$. Que se passe-t-il quand ces contours sont tangents ?] Alors, justifier que les extréma e_i obéissent à l'équation : $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$. Ici λ est appellé le multiplicateur de Lagrange.

c) Justifier que les extréma e_i satisfont également l'équation : $\vec{\nabla}\left[f(x,y) - \lambda\left(g(x,y) - 1\right)\right] = 0$. Expliquer l'intérêt que peut avoir une telle écriture si on élargit la définition du gradient à $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$.

Dans le cas où plusieurs contraintes $g_1 = c_1$, $g_2 = c_2, \ldots, g_k = c_k$ sont présentes, les extréma vérifient l'équation généralisée $\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{\nabla} g_i$ ou bien $\vec{\nabla}[f - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (g_i - c_i)] = 0$.

2) Une corde pesante sous l'effet de la gravité.

On propose de calculer la forme $y(x)$ d'une corde pesante sous l'effet de la gravité entre les deux points $x = \pm a$. La corde est attachée a deux points et sa longueur l_0 est fixe. On suppose la corde non extensible.

a) Montrer que la forme de la corde $y(x)$ satisfait à :

$$l_0 = \int_{-a}^{a} dx\, \sqrt{1 + y_x^2}. \tag{1}$$

b) Justifier que l'énergie potentielle due à la gravité est :

$$E_{pot} = \int_{-a}^{a} dx\, \rho g\, y(x) \sqrt{1 + y_x^2}. \tag{2}$$

où ρ est la masse linéique de la corde et g l'accélération de la pesanteur.

c) A l'aide des résultats trouvés au problème 1) ci-dessus, justifier que l'on cherche l'extrémum de la fonctionelle suivante :

$$F[y] = \int_{-a}^{a} dx\, \rho g\, y(x) \sqrt{1 + y_x^2} - \lambda \left(\int_{-a}^{a} dx \sqrt{1 + y_x^2} - l_0 \right). \tag{3}$$

Ici λ est une constante dont la dimension est celle d'une tension.

d) Montrer que la forme de la corde est donnée par

$$y(x) = \frac{\lambda}{\rho g} + \alpha \cosh\left(\frac{x + \beta}{\alpha}\right). \tag{4}$$

e) Déterminer α, β et λ.

3) Equations d'Euler-Lagrange sous contrainte.

On étudie un systeeme avec N degrées de liberté $\vec{q} = q_1, q_2, ..., q_N$ qui vérifient la contrainte suivante :

$$C(q_1, ..., q_N) = A. \tag{5}$$

a) Justifier pourquoi il est naturel d'élargir le postulat d'Hamilton de la manière suivante : Les trajectoires $q_i(t)$ suivies rendent l'action S minimale. Ici S est l'action sous contrainte, donnée par :

$$S[\vec{q}, \lambda(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right) - \lambda(C(\vec{q}) - A) \right] dt \tag{6}$$

b) Calculer la variation δS au premier ordre et démontrer qu'une action minimale est équivalent aux deux equations :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\lambda \frac{\partial C}{\partial q_k} \tag{7}$$

pour $k = 1, ..., N$ et $C(q_1, ..., q_N) = A$. Ici $q_k(t_1)$et $q_k(t_2)$ sont fixés par des conditions intitiales et finales. Donner une interprétation physique au terme $-\lambda \frac{\partial C}{\partial q_k}$.

c) Démontrer que $\vec{\nabla} C \cdot \vec{dq} = 0$. Donner une interprétation physique de cette équation.

d) Calculer l'énergie totale E et démontrer que $dE/dt = 0$.

4) Nature de l'extrémum de l'action.

Soit un système dynamique unidimensionnel décrit par le Lagrangien $L = m\dot{x}^2/2 - V(x)$. Soit $x_{\rm cl}(t)$ la trajectoire qui rend extrémale l'action $S = \int_{t_a}^{t_b} L\, dt$. Elle vérifie les conditions initiale et finale $x_{\rm cl}(t_a) = x_a$ et $x_{\rm cl}(t_b) = x_b$. Soit la variation $\delta x(t)$ telle que $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$.

a) Calculer $S[x_{cl} + \delta x]$ et montrer que, à l'ordre 2 en δx,

$$S[x_{cl} + \delta x] - S[x_{cl}] \equiv \delta S^2 = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[m\delta\dot{x}^2 - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_{\rm cl}(t)} \delta x^2 \right]. \tag{8}$$

Rappeler que $\delta S^2 > 0$, pour que $x_{\rm cl}$ corresponde à un minimum de l'action S.

b) Montrer que ce résultat s'écrit également

$$\delta S^2 = -\frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt\; \delta x \left[m\frac{d^2}{dt^2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_{\rm cl}(t)} \right] \delta x. \tag{9}$$

c) Soit la constante $C = \sup_{t\in[t_a,t_b]} \left[\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_{\rm cl}(t)} \right]$. Montrer que

$$\delta S^2 \geq \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt\; \delta x \left[-m\frac{d^2}{dt^2} - C \right] \delta x. \tag{10}$$

d) On étudie l'opérateur différentiel $\hat{D} = -m\frac{d^2}{dt^2} - C$ sur l'intervalle $t \in [t_a, t_b]$. Utiliser l'analogie avec l'équation de Schrödinger unidimensionnelle pour discuter des fonctions propres orthonormées $\psi_n(t)$ et des valeurs propres λ_n pour le problème $\hat{D}\psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$ avec $\psi_n(t_a) = \psi_n(t_b) = 0$.

e) Justifier que $\delta x(t) = \sum_n c_n \psi_n(t)$. Montrer que

$$\delta S^2 \geq (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (mn^2\pi^2/T^2 - C), \tag{11}$$

où $T = t_b - t_a$. Conclure sur la nature de l'extrémum de S pour $x_{cl}(t)$.