Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistère : Théorie des champs classiques
http ://www.pheliqs.fr/Lists/StaticFiles/Julia-S-Meyer/Teaching/tcc.html

TD 1 : Extrémum d'une fonctionnelle – 13 janvier 2020

1) Identité de Beltrami.

Soit $q(x)$ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q_x = \frac{d}{dx}q$, et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x)$.

a) Montrer que la fonctionnelle $A[q] = \int_{x_0}^{x_1} dx\, \mathcal{L}$ est extrémale si q vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} = 0 \tag{1}$$

b) En déduire que $q_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dx}\left(q_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}\right) - q_{xx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}$.

c) Calculer $\frac{d\mathcal{L}}{dx}$ et montrer que $\frac{d\mathcal{L}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(q_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}\right)$.

d) En déduire que $cte = \mathcal{L} - q_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x}$. Cette équation s'appelle l'identité de Beltrami.

2) Caténoide.

Cet exercice propose de trouver la surface d'aire minimale qui relie deux anneaux concentriques de même rayon parallèle R. La distance entre les deux anneaux est $2h$.

a) Soit $r(z)$ la distance à l'axe de révolution et z l'altitude. Démontrer que la surface de revolution est donnée par :

$$A[r] = 2\pi \int_{-h}^{+h} dz \cdot r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2} \tag{2}$$

b) A l'aide de l'identité de Beltrami montrer que la fonction $r(z)$ qui minimise l'aire est solution de l'équation $r'^2 = (\alpha r)^2 - 1$.

c) En déduire que $r(z) = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha z)$.

d) Substituer cette solution dans l'équation (2) et trouver une expression pour l'aire en fonction du paramètre $a = \alpha h$ et h. On donne $\int dx\, \cosh^2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh(2x)$.

e) Donner l'équation qui détermine la constante a en fonction du rapport R/h. Résoudre cette équation graphiquement. Montrer que suivant la valeur que prend le rapport R/h il y a deux, une ou aucune solution. Pour le même rayon R discuter l'évolution de la surface extrémale en augementant la distance h entre les deux cercles. Cette surface extrémale s'appelle une caténoide.

f) Application : Pour des raisons de minimisation de l'énergie de surface les bulles de savon prennent une forme avec une surface minimale. Imaginez que vous trempiez deux anneaux dans une solution de savon. Sous quelle condition une caténoide se forme en retirant les anneaux de la solution ? Qu'est-ce qui se passe quand on augemente la distance entre les anneaux ?

3) Equation d'Euler-Lagrange pour une plaque encastrée.

On considère l'expression

$$F[q] = \int_{x_0}^{x_1} dx\, \mathcal{F}(q(x), dq/dx, d^2q/dx^2). \tag{3}$$

a) Quelle est la différence entre une fonction et une fonctionnelle ?

b) Dans l'equation (3), dire de chaque objet F, $\mathcal{F}$ et q s'il s'agit d'une fonction ou une fonctionnelle. S'il s'agit d'une fonction, de combien de variables dépend-elle ? Justifier vos réponses.

Dans l'equation (3), on varie $q(x)$ tel que $q(x) \to q(x) + \epsilon h(x)$. On cherche l'extrémum de F : sous la variation de q, la variation de F doit être d'ordre ϵ^2 au moins.

c) Montrer que cela implique que

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left\{ h(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} + h'(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_x} + h''(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_{xx}} \right\} = 0. \tag{4}$$

On formulera (avec des mots) précisément la signification des notations $h'(x), h''(x)$, $\partial \mathcal{F}/\partial q$, $\partial \mathcal{F}/\partial q_x$, $\partial \mathcal{F}/\partial q_{xx}$.

d) Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange correspondante est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_{xx}} = 0. \tag{5}$$

On se servira de l'équation (5) afin de déterminer la forme d'une plaque encastrée, voir la figure 1.

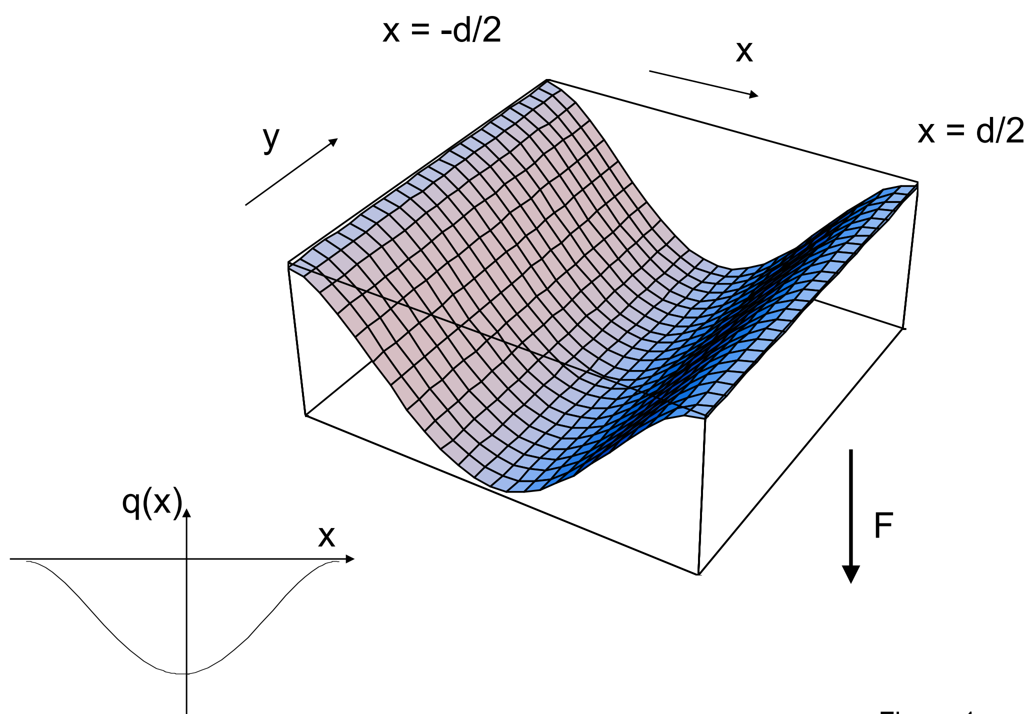

Figure 1

La plaque, infiniment étendue selon y, est encastrée de deux côtés $x = -d/2$ et $x = d/2$. Une densité de force uniforme F induit une déformation $q(x)$ selon la direction z. Soit l'énergie E associée à la déformation (par unité de longueur selon y)

$$E[q] = \int_{-d/2}^{d/2} dx\, \mathcal{E}(q(x), d^2q/dx^2) = \int_{-d/2}^{d/2} dx \left\{ \frac{K}{2} \left(\frac{d^2 q}{dx^2} \right)^2 - Fq \right\}, \tag{6}$$

avec K une constante élastique.

e) Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange pour ce problème est donnée par

$$K \frac{d^4 q}{dx^4} - F = 0. \tag{7}$$

f) Trouver la déformation de la plaque $q(x)$ en imposant les conditions d'encastrement $q(-d/2) = q(d/2) = q'(-d/2) = q'(d/2) = 0$.