

EXAMEN FINAL – 14 mai 2019 (3h)

Modalités : 1 feuille A4 recto-verso manuscrite permise.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
 - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche.
 - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
 - Les questions marquées par un astérisque sont des questions supplémentaires.
-

1. Questions courtes. [$\sim 15\%$]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

→ **a)** Nous considérons un cristal tridimensionnel. Le vecteur \vec{u}_i décrit le déplacement de l'atome i de sa position d'équilibre. De quelles variables peut dépendre la densité Lagrangienne dans la limite continue ?

→ **b)** Comment est-ce qu'on obtient les équations de Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$?

→ **c)** Le principe de superposition s'applique à quel type de systèmes ? Quelles contraintes est-ce que cela met sur la densité Lagrangienne de tels systèmes ?

→ **d)** Décrire les concepts qui permettent de développer une théorie de Ginzburg-Landau pour une transition de phase. Commenter sur le rôle des symétries du système.

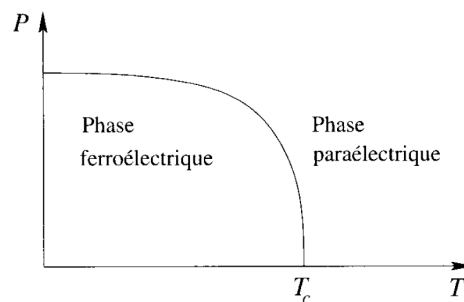
page suivante

→

2. Solitons : Parois de domaines dans les matériaux ferroélectriques

[~ 50%]

(Problème basé sur Peyrard & Dauxois, *Physique des solitons*, Chapitre 10)



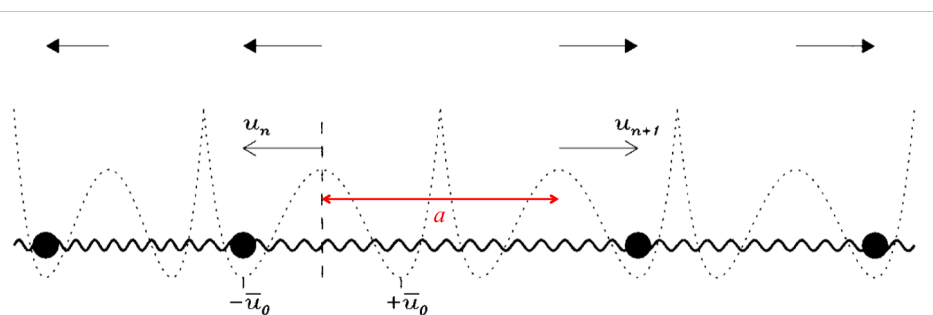
Un matériau ferroélectrique possède un moment dipolaire électrique permanent qui subsiste même en l'absence de champ extérieur appliqué. Le moment par unité de volume constitue la polarisation P du matériau. Elle dépend de la température et disparaît au-dessus d'une température critique, notée T_c . Pour des températures supérieures à la température critique, le matériau est dans un état dit paraélectrique, sans polarisation spontanée, comme le montre la figure ci-dessus.

Il est possible de proposer un modèle de cristal ferroélectrique retenant que les caractéristiques physiques essentielles du matériau et se limitant à une seule direction spatiale. Il permet de modéliser la structure des parois de domaines et d'en déduire certaines propriétés du matériau comme sa réponse diélectrique.

On considère une chaîne d'atomes couplés, correspondants aux ions d'un élément du cristal, placés chacun dans un potentiel double puits que l'on appelle généralement potentiel de substrat. Il correspond au potentiel créé par les autres atomes du réseau. Au niveau de description où nous nous plaçons, il n'est pas nécessaire de chercher à décrire quantitativement le potentiel dans lequel se trouvent les ions. Si l'on se contente d'une description qualitativement correcte, il est intéressant de choisir une expression analytique qui facilite les calculs. On choisit généralement, le potentiel

$$V(u) = V_0 \left(1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2$$

avec $V_0 > 0$. Ici u est le déplacement de l'ion par rapport à sa position d'équilibre à $V_0 = 0$, voir la figure ci-dessous. La polarisation P est proportionnelle au déplacement u . En outre, on considère l'énergie cinétique des ions de masse m ainsi qu'un couplage harmonique entre premiers voisins. Le couplage harmonique peut être décrit par des ressorts de raideur C comme le montre la figure. On dénote a la distance d'équilibre entre les ions à $V_0 = 0$.



→ a) Ecrire le Lagrangien de la chaîne.

b) Déterminer les équations du mouvement. Commenter sur leur forme.

c) Prendre la limite continue et montrer que la densité Lagrangienne prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}\rho c_0^2 u_x^2 - \frac{1}{4}\rho\omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2}\right)^2.$$

Exprimer les constantes ρ , c_0 et ω_0 en fonction des paramètres du modèle.

→ **d)** Spécifier les conditions qui justifient une limite continue.

→ **e)** Déterminer la densité Hamiltonienne correspondante.

→ **f)** Dériver les équations d'Euler-Lagrange en extrémisant l'action

$$S[u] = \int dt \int dx \mathcal{L}(u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)).$$

Expliquer toutes les étapes.

g) Montrer que l'équation du mouvement prend la forme

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + \omega_0^2 u \left(1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2}\right).$$

→ **h)** Trouver les solutions $u(x, t) = cste$. Est-ce qu'il s'agit de configurations d'équilibre stables ou instables ?

→ **i)** Dans un premier temps, nous allons considérer des petits déplacements $u(x, t) = \bar{u}_0 + \epsilon \eta(x, t)$ avec $\epsilon \ll 1$. Linéariser l'équation autour de $u(x, t) = \bar{u}_0$.

j) Montrer que les solutions de l'équation linéarisée sont des ondes planes $\eta(x, t) = \eta e^{i(kx - \omega t)}$. Donner la dispersion $\omega(k)$.

k) Les solutions trouvées en **h)** correspondent aux phonons du cristal ferroélectrique. Déterminer la vitesse de phase dans la limite des grands vecteurs d'ondes.

→ **l)** Dans un deuxième temps, nous cherchons des solutions de grande amplitude, où $u(x, t)$ varie entre $+\bar{u}_0$ et $-\bar{u}_0$. Cela permet de décrire des parois de domaine. En particulier, nous cherchons des solutions de la forme $u(x, t) = f(x - vt)$. Décrire les caractéristiques d'une telle solution.

→ **m)** Déterminer l'équation différentielle pour $f(z)$.

n) Montrer que l'équation différentielle peut être interprétée comme l'équation de mouvement d'une particule fictive dans un potentiel

$$U(f) = +\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} f^2 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\bar{u}_0^2 (c_0^2 - v^2)} f^4.$$

→ **o)** Représenter le potentiel graphiquement (i) pour $v < c_0$ et (ii) pour $v > c_0$. Discuter dans quel cas il peut y avoir des solutions de l'équation du mouvement tel que $f(z) \rightarrow -\bar{u}_0$ pour $z \rightarrow -\infty$ et $f(z) \rightarrow +\bar{u}_0$ pour $z \rightarrow +\infty$.

p) Montrer que la conservation de l'énergie mécanique pour la particule fictive peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4\bar{u}_0^2(c_0^2 - v^2)} (f^2 - \bar{u}_0^2)^2 = cste.$$

Déterminer la valeur de la constante pour le cas où $f(z) \rightarrow -\bar{u}_0$ pour $z \rightarrow -\infty$ et $f(z) \rightarrow +\bar{u}_0$ pour $z \rightarrow +\infty$.

→ **q)** Introduire des quantités \tilde{f} et \tilde{z} afin d'obtenir une équation sans dimensions pour le cas $c_0 > v$.

r) Montrer que la solution recherchée est donnée par

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = \tanh(\tilde{z} - \tilde{z}_0).$$

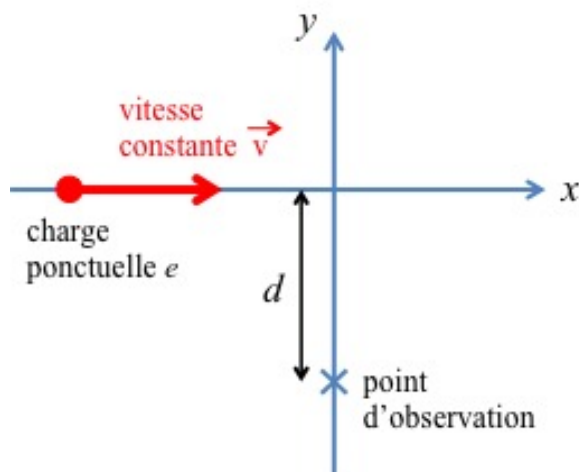
s) Représenter graphiquement $u(x, t)$ correspondant à la solution $\tilde{f}(\tilde{z})$ donnée en r) pour deux temps différents. Spécifier l'échelle spatiale de variation de $u(x, t)$. Sous quelles conditions est-ce que la limite continue est justifiée ?

t) Donner l'expression pour l'énergie totale (mesurée par rapport à l'état fondamental) de cette configuration.

* **u)** Calculer l'énergie totale de cette configuration. Commenter.

$$[\text{Help : } \int_{-\infty}^{\infty} dx \cosh^{-4} x = 4/3.]$$

3. Relativité et électromagnétisme : Charge en mouvement uniforme. [$\sim 35\%$]



Nous allons considérer le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle e en mouvement uniforme (voir figure).

→ **a)** Donner l'action du champ électromagnétique en présence de charges. Définir toutes les quantités.

b) Déterminer les deux équations de Maxwell qui impliquent les charges sous forme covariante en utilisant le principe d'extremum de l'action.

→ **c)** Le tenseur électromagnétique est donné par

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dots & E_x & E_y & E_z \\ \dots & \dots & -B_z & B_y \\ \dots & \dots & \dots & -B_x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Compléter les éléments manquants.

→ **d)** Un quadri-vecteur A_μ se transforme sous une transformation de Lorentz comme $A'_\mu = L_\mu{}^\nu A_\nu$. On suppose que le référentiel K' se déplace par rapport au référentiel K avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$. Donner le tenseur $L_\mu{}^\nu$.

e) Comment est-ce que se transforme le tenseur électromagnétique ?

f) Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y), \end{aligned}$$

avec $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

→ **g)** On se place dans le référentiel K' , où la charge e est au repos. Donner les champs électromagnétiques $\vec{E}'(\vec{r}', t')$ et $\vec{B}'(\vec{r}', t')$ dans ce référentiel.

h) Déterminer la position \vec{r}'_{po} du point d'observation dans le référentiel K' .

i) Quelles composantes des champs électromagnétiques sont non-nulles dans le référentiel K au point d'observation \vec{r}_{op} (voir figure) ?

j) Déterminer les champs électromagnétiques $\vec{E}(\vec{r}_{op}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}_{op}, t)$ dans le référentiel K .

k) Déterminer la norme $||\vec{E}(\vec{r}_{op}, t)||$. Quand est-ce que le champ est maximal ? Comparer au champ d'une charge statique.

* **i)** On choisit une jauge tel que $\vec{A}' = 0$ dans le référentiel K' . Déterminer $\phi'(\vec{r}', t')$ ainsi que $\phi(\vec{r}, t)$ et $\vec{A}(\vec{r}, t)$.