

**EXAMEN FINAL – 14 mai 2019 (3h)**

---

**Modalités :** 1 feuille A4 recto-verso manuscrite permise.

**NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :**

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
  - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche.
  - La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
  - Les questions marquées par un astérisque sont des questions supplémentaires.
- 

**1. Questions courtes.** [ $\sim 15\%$ ]

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

→ **a)** Nous considérons un cristal tridimensionnel. Le vecteur  $\vec{u}_i$  décrit le déplacement de l'atome  $i$  de sa position d'équilibre. De quelles variables peut dépendre la densité Lagrangienne dans la limite continue ?

**Solution:** [*3 points*] La densité Lagrangienne peut dépendre du temps  $t$ , des positions  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , des vitesses  $\vec{u}_t(\vec{r}, t)$  ainsi que des dérivés spatiales d'ordre arbitraire :  $\vec{u}_{x_i}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{u}_{x_i x_j}(\vec{r}, t)$ , ...

→ **b)** Comment est-ce qu'on obtient les équations de Maxwell  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  ?

**Solution:** [*3 points*] Ces deux équations de Maxwell sont une conséquence du fait que les champs électromagnétiques dérivent des potentiels  $\phi$  et  $\vec{A}$  :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

→ **c)** Le principe de superposition s'applique à quel type de systèmes ? Quelles contraintes est-ce que cela met sur la densité Lagrangienne de tels systèmes ?

**Solution:** *[2 points]* Le principe de superposition s'applique à des systèmes linéaires. Pour obtenir des équations du mouvement linéaires la densité Lagrangienne doit être quadratique et ne pas contenir des contributions d'ordre supérieur.

→ **d)** Décrire les concepts qui permettent de développer une théorie de Ginzburg-Landau pour une transition de phase. Commenter sur le rôle des symétries du système.

**Solution:** *[4 points]* Le développement d'une théorie de Ginzburg-Landau nécessite (i) l'existence d'un paramètre d'ordre qui est nul dans une des phases (la phase désordonnée) et non-nul dans l'autre (la phase ordonnée) et (ii) l'existence d'une fonctionnelle de ce paramètre d'ordre qui joue le rôle d'un potentiel thermodynamique. Les symétries du système imposent des contraintes sur la forme de cette fonctionnelle.

---

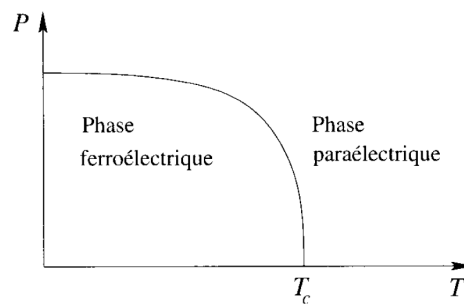
page suivante

→

## 2. Solitons : Parois de domaines dans les matériaux ferroélectriques

[~ 50%]

(Problème basé sur Peyrard & Dauxois, *Physique des solitons*, Chapitre 10)



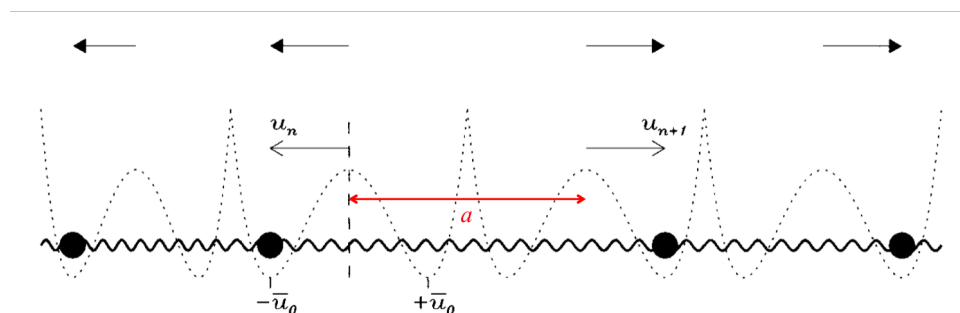
Un matériau ferroélectrique possède un moment dipolaire électrique permanent qui subsiste même en l'absence de champ extérieur appliqué. Le moment par unité de volume constitue la polarisation  $P$  du matériau. Elle dépend de la température et disparaît au-dessus d'une température critique, notée  $T_c$ . Pour des températures supérieures à la température critique, le matériau est dans un état dit paraélectrique, sans polarisation spontanée, comme le montre la figure ci-dessus.

Il est possible de proposer un modèle de cristal ferroélectrique retenant que les caractéristiques physiques essentielles du matériau et se limitant à une seule direction spatiale. Il permet de modéliser la structure des parois de domaines et d'en déduire certaines propriétés du matériau comme sa réponse diélectrique.

On considère une chaîne d'atomes couplés, correspondants aux ions d'un élément du cristal, placés chacun dans un potentiel double puits que l'on appelle généralement potentiel de substrat. Il correspond au potentiel créé par les autres atomes du réseau. Au niveau de description où nous nous plaçons, il n'est pas nécessaire de chercher à décrire quantitativement le potentiel dans lequel se trouvent les ions. Si l'on se contente d'une description qualitativement correcte, il est intéressant de choisir une expression analytique qui facilite les calculs. On choisit généralement, le potentiel

$$V(u) = V_0 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2$$

avec  $V_0 > 0$ . Ici  $u$  est le déplacement de l'ion par rapport à sa position d'équilibre à  $V_0 = 0$ , voir la figure ci-dessous. La polarisation  $P$  est proportionnelle au déplacement  $u$ . En outre, on considère l'énergie cinétique des ions de masse  $m$  ainsi qu'un couplage harmonique entre premiers voisins. Le couplage harmonique peut être décrit par des ressorts de raideur  $C$  comme le montre la figure. On dénote  $a$  la distance d'équilibre entre les ions à  $V_0 = 0$ .



→ a) Ecrire le Lagrangien de la chaîne.

**Solution:** [2 points] Le Lagrangien prend la forme

$$L = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 - \frac{C}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 - V_0 \left( 1 - \frac{u_i^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\}.$$

b) Déterminer les équations du mouvement. Commenter sur leur forme.

**Solution:** [3 points] Les équations de mouvement sont données par les équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \\ &= C(u_{i+1} - u_i) - C(u_i - u_{i-1}) + 4V_0 \frac{u_i}{\bar{u}_0^2} \left( 1 - \frac{u_i^2}{\bar{u}_0^2} \right) - \frac{d}{dt} m \dot{u}_i \\ &= C(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + 4V_0 \frac{u_i}{\bar{u}_0^2} \left( 1 - \frac{u_i^2}{\bar{u}_0^2} \right) - m \ddot{u}_i. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées.

c) Prendre la limite continue et montrer que la densité Lagrangienne prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} \rho c_0^2 u_x^2 - \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2.$$

Exprimer les constantes  $\rho$ ,  $c_0$  et  $\omega_0$  en fonction des paramètres du modèle.

**Solution:** [5 points] Dans la limite continue,  $u_i \rightarrow u(x_i) \rightarrow u(x)$ . En outre,  $u_{i+1} \rightarrow u(x_{i+1}) \rightarrow u(x+a) \approx u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} a$ . Finalement,  $\sum_i \rightarrow a^{-1} \int dx$ . Donc

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \left\{ \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 - \frac{C}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 - V_0 \left( 1 - \frac{u_i^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &\rightarrow a^{-1} \int dx \left\{ \frac{1}{2} m \dot{u}^2(x) - \frac{C}{2} \left[ \left( u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} a \right) - u(x) \right]^2 - V_0 \left( 1 - \frac{u^2(x)}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{u}^2 - \frac{Ca}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{V_0}{a} \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \int dx \mathcal{L}. \end{aligned}$$

C.a.d.,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{m}{a} u_t^2 - \frac{Ca}{2} u_x^2 - \frac{V_0}{a} \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2.$$

En comparant avec l'expression donnée, on obtient  $\rho = m/a$ ,  $c_0 = \sqrt{Ca^2/m}$  et  $\omega_0 = \sqrt{4V_0/(m\bar{u}_0^2)}$ .

→ **d)** Spécifier les conditions qui justifient une limite continue.

**Solution:** [1 points] La limite continue est justifiée si les variations de  $u$  sont petites sur l'échelle de la distance entre voisins  $a$ .

→ **e)** Déterminer la densité Hamiltonienne correspondante.

**Solution:** [3 points] La densité Hamiltonienne est obtenue à partir de la densité Lagrangienne par une transformation de Legendre :

$$\mathcal{H}(u, \Pi, u_x) = \Pi u_t(\Pi) - \mathcal{L}(u, u_t(\Pi), u_x)$$

avec  $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}$ . On obtient  $\Pi = \rho u_t$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi \frac{\Pi}{\rho} - \left\{ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\Pi}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho c_0^2 u_x^2 - \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2\rho} \Pi^2 + \frac{1}{2} \rho c_0^2 u_x^2 + \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2. \end{aligned}$$

→ **f)** Dériver les équations d'Euler-Lagrange en extrémisant l'action

$$S[u] = \int dt \int dx \mathcal{L}(u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)).$$

Expliquer toutes les étapes.

**Solution:** [6 points] Pour trouver un extremum de l'action, nous varions  $u(x, t) \rightarrow u(x, t) + \epsilon h(x, t)$ . Ici  $\epsilon \ll 1$  et  $h(x, t)$  est une fonction arbitraire qui est nulle sur les bords du volume d'intégration. On fait un développement  $S[u + \epsilon h] = S[u] + \epsilon \delta S[u, h] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Un extremum de l'action est obtenu quand  $\delta S[u, h] = 0$  pour toutes  $h$ .

Ici on trouve

$$\delta S[u, h] = \int dt \int dx \left\{ \rho u_t h_t - \rho c_0^2 u_x h_x + \rho \omega_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right) u h \right\}.$$

Pour les 2 premiers termes, on fait une intégration par partie par rapport à  $x$  et  $t$ , respectivement. Tenant compte du fait que les termes de bord sont nuls parce que  $h$  est nul sur les bords, on trouve

$$\begin{aligned} \delta S[u, h] &= \int dt \int dx \left\{ -\rho u_{tt} h + \rho c_0^2 u_{xx} h + \rho \omega_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right) u h \right\} \\ &= \int dt \int dx \left\{ -\rho u_{tt} + \rho c_0^2 u_{xx} + \rho \omega_0^2 u \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right) \right\} h. \end{aligned}$$

Donc  $\delta S[u, h] = 0$  pour toutes  $h$ , si

$$-\rho u_{tt} + \rho c_0^2 u_{xx} + \rho \omega_0^2 u \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right) = 0.$$

Plus général :

$$\begin{aligned}
 S[u + \epsilon h] &= \int dt \int dx \mathcal{L}(u + \epsilon h, u_t + \epsilon h_t, u_x + \epsilon h_x) \\
 &= \int dt \int dx \mathcal{L}(u, u_t, u_x) \\
 &\quad + \epsilon \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(u, u_t, u_x) h + \frac{\partial}{\partial u_t} \mathcal{L}(u, u_t, u_x) h_t + \frac{\partial}{\partial u_x} \mathcal{L}(u, u_t, u_x) h_x \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \delta S[u, h] &= \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L} h + \frac{\partial}{\partial u_t} \mathcal{L} h_t + \frac{\partial}{\partial u_x} \mathcal{L} h_x \right\} \\
 &= \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L} h - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial u_t} \mathcal{L} \right) h - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial u_x} \mathcal{L} \right) h \right\}
 \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial u_t} \mathcal{L} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial u_x} \mathcal{L} \right) = 0.$$

g) Montrer que l'équation du mouvement prend la forme

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx} + \omega_0^2 u \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right).$$

**Solution:** [1 points] Voir la solution ci-dessus.

→ h) Trouver les solutions  $u(x, t) = cste$ . Est-ce qu'il s'agit de configurations d'équilibre stables ou instables ?

**Solution:** [3 points] Pour  $u_{tt} = u_{xx} = 0$ , l'équation se réduit à  $u \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right) = 0$  qui permet trois solutions  $u_0 = 0$  et  $u_{\pm} = \pm \bar{u}_0$ . On note que  $u_0$  correspond à un maximum du potentiel  $V(u)$  tandis que  $u_{\pm}$  correspondent à des minima du potentiel  $V(u)$ . Donc  $u_0$  est instable tandis que  $u_{\pm}$  sont stables. Le système est donc bien ferroélectrique avec une polarisation  $P \propto u$  non-nulle.

→ i) Dans un premier temps, nous allons considérer des petits déplacements  $u(x, t) = \bar{u}_0 + \epsilon \eta(x, t)$  avec  $\epsilon \ll 1$ . Linéariser l'équation autour de  $u(x, t) = \bar{u}_0$ .

**Solution:** [2 points] L'équation du mouvement linéarisée prend la forme

$$\epsilon \eta_{tt} = c_0^2 \epsilon \eta_{xx} + \omega_0^2 \bar{u}_0 \left( -2\epsilon \frac{\eta}{\bar{u}_0} \right) \quad \text{ou} \quad \eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx} - 2\omega_0^2 \eta.$$

j) Montrer que les solutions de l'équation linéarisée sont des ondes planes  $\eta(x, t) = \eta e^{i(kx - \omega t)}$ . Donner la dispersion  $\omega(k)$ .

**Solution:** [2 points] En substituant  $\eta(x, t) = \eta e^{i(kx - \omega t)}$  dans l'équation du mouvement linéarisée, on obtient

$$-\omega^2 \eta e^{i(kx - \omega t)} = -k^2 c_0^2 \eta e^{i(kx - \omega t)} - 2\omega_0^2 \eta e^{i(kx - \omega t)}.$$

donc

$$\omega^2(k) = k^2 c_0^2 + 2\omega_0^2.$$

k) Les solutions trouvées en h) correspondent aux phonons du cristal ferroélectrique. Déterminer la vitesse de phase dans la limite des grands vecteurs d'ondes.

**Solution:** [1 points] La vitesse de phase est donnée par  $v_{ph} = \omega(k)/k$ . Pour  $k \gg \omega_0/c_0$ , on trouve  $v_{ph} = c_0$ .

→ l) Dans un deuxième temps, nous cherchons des solutions de grande amplitude, où  $u(x, t)$  varie entre  $+\bar{u}_0$  et  $-\bar{u}_0$ . Cela permet de décrire des parois de domaine. En particulier, nous cherchons des solutions de la forme  $u(x, t) = f(x - vt)$ . Décrire les caractéristiques d'une telle solution.

**Solution:** [1 points] Une solution de la forme  $u(x, t) = f(x - vt)$  se déplace à vitesse constante et sans déformation.

→ m) Déterminer l'équation différentielle pour  $f(z)$ .

**Solution:** [2 points] Avec  $u_{tt} = v^2 f_{zz}$  et  $u_x = f_z$ , on obtient

$$v^2 f_{zz} = c_0^2 f_{zz} + \omega_0^2 f \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right) \quad \text{ou} \quad f_{zz} = \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} f \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right).$$

n) Montrer que l'équation différentielle peut être interprétée comme l'équation de mouvement d'une particule fictive dans un potentiel

$$U(f) = + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} f^2 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\bar{u}_0^2 (c_0^2 - v^2)} f^4.$$

**Solution:** [3 points] Si on interprète  $z$  comme le temps et  $f$  comme la position d'une particule fictive de masse  $m = 1$ , l'équation de Newton est donnée par  $f_z z = F(f)$ , où  $F$  est la force totale qui s'applique sur la particule. Pour une force conservative, on peut définir un potentiel tel que  $F = -\frac{\partial}{\partial f} U$ . Ici

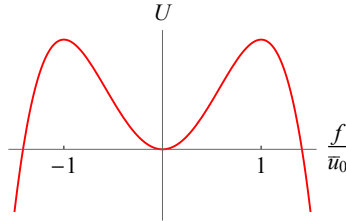
$$F(f) = -\frac{\partial}{\partial f} U(f) = \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} f \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right).$$

Donc

$$U(f) = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} f^2 - \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{\bar{u}_0^2 (c_0^2 - v^2)} f^4 + cste.$$

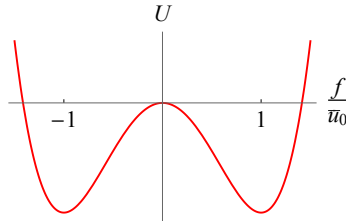
→ **o)** Représenter le potentiel graphiquement (i) pour  $v < c_0$  et (ii) pour  $v > c_0$ . Discuter dans quel cas il peut y avoir des solutions de l'équation du mouvement tel que  $f(z) \rightarrow -\bar{u}_0$  pour  $z \rightarrow -\infty$  et  $f(z) \rightarrow +\bar{u}_0$  pour  $z \rightarrow +\infty$ .

**Solution:** [2 points] Pour  $v < c_0$ , le potentiel est maximal à  $f = \pm \bar{u}_0$  :



On peut trouver des trajectoires qui approchent ces maxima pour  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Pour  $v > c_0$ , le potentiel est minimal à  $f = \pm \bar{u}_0$  :



Il n'y a pas de trajectoire qui approche ces minima pour  $z \rightarrow \pm\infty$ .

**p)** Montrer que la conservation de l'énergie mécanique pour la particule fictive peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4\bar{u}_0^2 (c_0^2 - v^2)} (f^2 - \bar{u}_0^2)^2 = cste.$$

Déterminer la valeur de la constante pour le cas où  $f(z) \rightarrow -\bar{u}_0$  pour  $z \rightarrow -\infty$  et  $f(z) \rightarrow +\bar{u}_0$  pour  $z \rightarrow +\infty$ .

**Solution:** [3 points] On multiplie l'équation du mouvement  $f_{zz} = \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} f \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)$  par  $f_z$  pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} f_z^2 = f_z f_{zz} = \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} f_z f \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right) = \frac{d}{dz} \left[ -\frac{\omega_0^2 \bar{u}_0^2}{4(v^2 - c_0^2)} \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right].$$



Donc

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{2} f_z^2 - \frac{\omega_0^2 \bar{u}_0^2}{4(c_0^2 - v^2)} \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} f_z^2 - \frac{\omega_0^2 \bar{u}_0^2}{4(c_0^2 - v^2)} \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 = cste.$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique tandis que le deuxième terme décrit l'énergie potentielle.

Pour la solution qu'on cherche l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont nulles à  $z \rightarrow \pm\infty$ . Donc la constante est nulle.

→ **q)** Introduire des quantités  $\tilde{f}$  et  $\tilde{z}$  afin d'obtenir une équation sans dimensions pour le cas  $c_0 > v$ .

**Solution:** [2 points] Avec  $\tilde{f} = f/\bar{u}_0$  et  $\tilde{z} = z\omega_0/\sqrt{2(c_0^2 - v^2)}$ , on obtient

$$\tilde{f}_{\tilde{z}}^2 - (1 - \tilde{f}^2)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_{\tilde{z}} = \pm(1 - \tilde{f}^2).$$

**r)** Montrer que la solution recherchée est donnée par

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = \tanh(\tilde{z} - \tilde{z}_0).$$

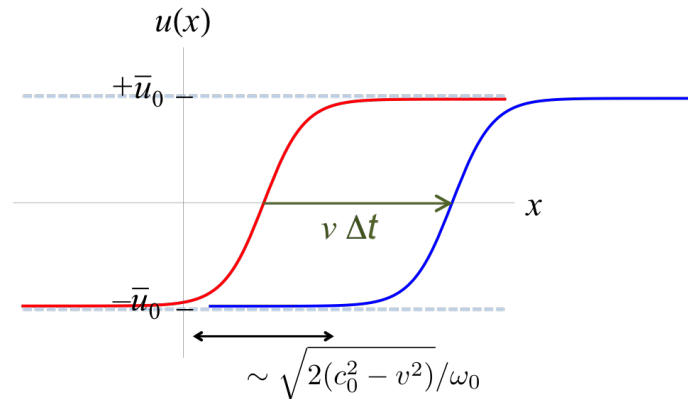
**Solution:** [2 points] On trouve

$$\tilde{f}_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = \frac{\cosh^2(\tilde{z} - \tilde{z}_0) - \sinh^2(\tilde{z} - \tilde{z}_0)}{\cosh^2(\tilde{z} - \tilde{z}_0)} = 1 - \tanh^2(\tilde{z} - \tilde{z}_0) = 1 - \tilde{f}^2(\tilde{z}).$$

Il s'agit donc bien d'une solution de l'équation différentielle. En outre  $\tilde{f} \rightarrow \pm 1$  pour  $\tilde{z} \rightarrow \pm\infty$ , ce qui correspond à  $f \rightarrow \pm\bar{u}_0$  pour  $z \rightarrow \pm\infty$ .

**s)** Représenter graphiquement  $u(x, t)$  correspondant à la solution  $\tilde{f}(\tilde{z})$  donnée en r) pour deux temps différents. Spécifier l'échelle spatiale de variation de  $u(x, t)$ . Sous quelles conditions est-ce que la limite continue est justifiée ?

**Solution:** [3 points]



La limite continue est justifiée si la largeur de la paroi de domaine est beaucoup plus grand que la distance entre atomes,

$$\sqrt{2} \frac{c_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} = a \sqrt{\frac{C\bar{u}_0^2}{2V_0}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \gg a.$$

Cela implique en particulier  $V_0 \ll C\bar{u}_0^2/2$  et des vitesses pas trop proches de la vitesse de phase des phonons,  $1 - v/c_0 \gg \frac{C\bar{u}_0^2}{V_0}$ .

**t)** Donner l'expression pour l'énergie totale (mesurée par rapport à l'état fondamental) de cette configuration.

**Solution:** [2 points] L'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} E &= \int dx \mathcal{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} \rho c_0^2 u_x^2 + \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left( 1 - \frac{u^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \int dz \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 f_z^2 + \frac{1}{2} \rho c_0^2 f_z^2 + \frac{1}{4} \rho \omega_0^2 \bar{u}_0^2 \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \rho (c_0^2 + v^2) \int dz \left\{ f_z^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 \bar{u}_0^2}{c_0^2 + v^2} \left( 1 - \frac{f^2}{\bar{u}_0^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \rho (c_0^2 + v^2) \omega_0 \bar{u}_0^2 \sqrt{2(c_0^2 - v^2)} \int d\tilde{z} \left\{ \frac{1}{c_0^2 - v^2} \tilde{f}_{\tilde{z}}^2 + \frac{1}{c_0^2 + v^2} (1 - \tilde{f}^2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rho c_0 \omega_0 \bar{u}_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \int d\tilde{z} (1 - \tilde{f}^2)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rho c_0 \omega_0 \bar{u}_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \int d\tilde{z} \frac{1}{\cosh^4(\tilde{z} - \tilde{z}_0)}. \end{aligned}$$

\* **u)** Calculer l'énergie totale de cette configuration. Commenter.

[Help :  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cosh^{-4} x = 4/3$ .]

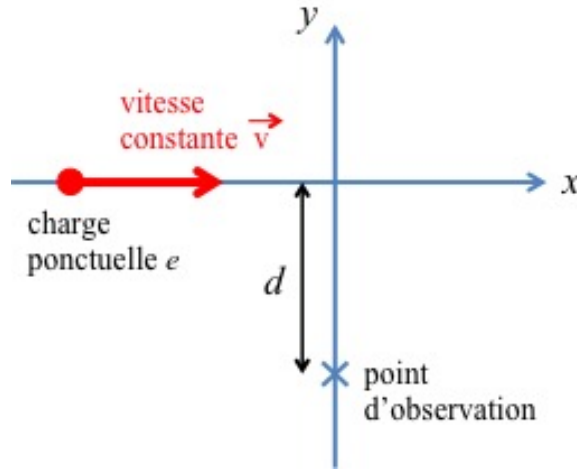
**Solution:** [4 points] On obtient

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho c_0 \omega_0 \bar{u}_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}.$$

Cela correspond à l'énergie relativiste d'une particule de masse  $M = 2\sqrt{2}\rho\omega_0\bar{u}_0^2/(3c_0)$  et une vitesse de la lumière donnée par  $c_0$ .

### 3. Relativité et électromagnétisme : Charge en mouvement uniforme.

[~ 35%]



Nous allons considérer le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle  $e$  en mouvement uniforme (voir figure).

→ a) Donner l'action du champ électromagnétique en présence de charges. Définir toutes les quantités.

**Solution:** [4 points] L'action peut s'écrire sous la forme  $S = S_{\text{champ}} + S_{\text{int}}$  avec

$$S_{\text{champ}} = -\frac{1}{16\pi} \int dV dt F_{\mu\nu} F^{\nu\mu},$$

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int dV dt j_{\mu} A^{\mu}.$$

Ici  $A_{\mu}$  est le quadri-potiel et  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\mu}$  le tenseur électromagnétique. En outre,  $j_{\mu}$  est le quadri-courant.

b) Déterminer les deux équations de Maxwell qui impliquent les charges sous forme covariante en utilisant le principe d'extremum de l'action.

**Solution:** [4 points] Pour obtenir les équations de Maxwell, nous appliquons le principe variationnel en variant  $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \delta A_{\mu}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{8\pi} \int dV dt F_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta A^{\nu} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A^{\mu} \right) - \frac{1}{c} \int dV dt j_{\mu} \delta A^{\mu} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV dt \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} F_{\mu\nu} \delta A^{\nu} - \frac{1}{c} \int dV dt j_{\mu} \delta A^{\mu}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{\nu}.$$

→ **c)** Le tenseur électromagnétique est donné par

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dots & E_x & E_y & E_z \\ \dots & \dots & -B_z & B_y \\ \dots & \dots & \dots & -B_x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Compléter les éléments manquants.

**Solution:** [2 points] Il s'agit d'un tenseur antisymétrique  $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ . Donc

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

→ **d)** Un quadri-vecteur  $A_\mu$  se transforme sous une transformation de Lorentz comme  $A'_\mu = L_\mu{}^\nu A_\nu$ . On suppose que le référentiel  $K'$  se déplace par rapport au référentiel  $K$  avec une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ . Donner le tenseur  $L_\mu{}^\nu$ .

**Solution:** [2 points] Le tenseur  $L_\mu{}^\nu$  est donné par

$$L_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**e)** Comment est-ce que se transforme le tenseur électromagnétique ?

**Solution:** [1 points] Le tenseur électromagnétique se transforme comme

$$F'_{\mu\nu} = L_\mu{}^{\mu'} L_\nu{}^{\nu'} F_{\mu'\nu'}.$$

**f)** Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y), \end{aligned}$$

avec  $\beta = v/c$  et  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

**Solution:** [5 points] Comme il s'agit d'un tenseur antisymétrique, il y a 6 composantes à déterminer. Avec le résultat de e), on obtient

$$\begin{aligned}
 F'_{01} = E'_x &= L_0^0 L_1^1 F_{01} + L_0^1 L_1^0 F_{10} = \gamma^2 E_x - \gamma^2 \beta^2 E_x = E_x \\
 F'_{02} = E'_y &= L_0^0 L_2^2 F_{02} + L_0^1 L_2^2 F_{12} = \gamma E_y - \gamma \beta B_z \\
 F'_{03} = E'_z &= L_0^0 L_3^3 F_{03} + L_0^1 L_3^3 F_{13} = \gamma E_z + \gamma \beta B_y \\
 F'_{12} = -B'_z &= L_1^0 L_2^2 F_{02} + L_1^1 L_2^2 F_{12} = \gamma \beta E_y - \gamma B_z \\
 F'_{13} = B'_y &= L_1^0 L_3^3 F_{03} + L_1^1 L_3^3 F_{13} = \gamma \beta E_z + \gamma B_y \\
 F'_{23} = -B'_x &= L_2^2 L_3^3 F_{23} = -B_x
 \end{aligned}$$

→ g) On se place dans le référentiel  $K'$ , où la charge  $e$  est au repos. Donner les champs électromagnétiques  $\vec{E}'(\vec{r}', t')$  et  $\vec{B}'(\vec{r}', t')$  dans ce référentiel.

**Solution:** [2 points] Pour une charge ponctuelle au repos le champ magnétique est nul tandis que le champ électrique est donné par (cgs)

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \frac{e}{(r')^3} \vec{r}'.$$

h) Déterminer la position  $\vec{r}'_{po}$  du point d'observation dans le référentiel  $K'$ .

**Solution:** [1 points] Avec  $\vec{r}_{po} = -d\vec{e}_y$  et en utilisant la transformation de Lorentz, on obtient

$$\vec{r}'_{po} = -\gamma \beta c t \vec{e}_x - d \vec{e}_y.$$

i) Quelles composantes des champs électromagnétiques sont non-nulles dans le référentiel  $K$  au point d'observation  $\vec{r}_{op}$  (voir figure) ?

**Solution:** [1 points] Les composantes non-nulles sont  $E_x$ ,  $E_y$  et  $B_z$ .

j) Déterminer les champs électromagnétiques  $\vec{E}(\vec{r}_{op}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}_{op}, t)$  dans le référentiel  $K$ .

**Solution:** [3 points] Selon f), on obtient

$$\begin{aligned}
 E_x &= E'_x = -\gamma \beta c t \frac{e}{[(\gamma \beta c t)^2 + d^2]^{3/2}}, \\
 E_y &= \gamma E'_y = -\gamma d \frac{e}{[(\gamma \beta c t)^2 + d^2]^{3/2}}, \\
 B_z &= -\gamma \beta E'_y = \gamma \beta d \frac{e}{[(\gamma \beta c t)^2 + d^2]^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

k) Déterminer la norme  $||\vec{E}(\vec{r}_{op}, t)||$ . Quand est-ce que le champ est maximal ? Comparer au champ d'une charge statique.

**Solution:** [3 points] La norme du champ électrique est donnée

$$||\vec{E}(\vec{r}_{op}, t)|| = \frac{e\gamma}{[(\gamma\beta ct)^2 + d^2]^{3/2}} \sqrt{(\beta ct)^2 + d^2}.$$

Le champ est maximal à  $t = 0$  :

$$||\vec{E}(\vec{r}_{op}, 0)|| = \frac{e\gamma}{d^2}.$$

Par rapport à une charge statique à la même distance, il y a une augmentation de l'intensité du champ d'un facteur  $\gamma$ .

\* i) On choisit une jauge tel que  $\vec{A}' = 0$  dans le référentiel  $K'$ . Déterminer  $\phi'(\vec{r}', t')$  ainsi que  $\phi(\vec{r}, t)$  et  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ .

**Solution:** [4 points] Le potentiel scalaire  $\phi'$  d'une charge au repos dans le référentiel  $K'$  est donné par (cgs)

$$\phi(\vec{r}', t') = \frac{e}{r'}.$$

Pour obtenir  $\phi(\vec{r}, t)$  et  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , on applique la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \gamma \frac{e}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)}}, \\ A_x(\vec{r}, t) &= \gamma\beta \frac{e}{\sqrt{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)}}, \quad A_y(\vec{r}, t) = A_z(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi &= -\gamma \frac{e}{[(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} \gamma^2(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} &= -\gamma\beta \frac{e}{[(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} -v\gamma^2(x - vt) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= -\gamma\beta \frac{e}{[(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = \gamma \frac{e}{[(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\gamma\beta \frac{e}{[(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}_{op}, t) &= \gamma \frac{e}{[(\gamma^2(vt)^2 + d^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} -vt \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{B}(\vec{r}_{op}, t) &= -\gamma\beta \frac{e}{[(\gamma^2(vt)^2 + d^2)^{3/2}]} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$