Université Grenoble Alpes Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistère
Théorie des champs classiques – http ://inac.cea.fr/pisp/julia.meyer/tcc.html

EXAMEN FINAL – 17 mai 2018 (3h)

Modalités : 1 feuille A4 recto-verso manuscrite permise.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

— Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
— Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche.
— La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
— Les questions marquées par un astérisque sont des questions supplémentaires

1. Questions courtes.

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

a) On considère un système avec une densité Lagrangienne $\mathcal{L}(u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t))$. Donner l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Décrire brièvement comment on l'obtient.

b) Qu'est-ce une onde solitaire ?

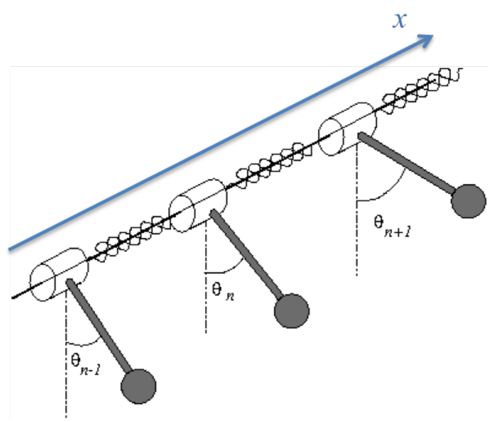
c) Quelle est l'intervalle entre deux événements dans l'espace-temps ? Montrer sur un diagramme adapté ce qui correspond à une intervalle type (i) temps, (ii) lumière et (iii) espace.

d) Donner l'action décrivant des particules chargées en présence de champs électromagnétiques. Expliquer la signification des différentes contributions.

e) Qu'est-ce l'invariance de jauge ?

page suivante
→

2. Solitons : Chaîne de pendules couplés



Nous allons considérer une chaîne de pendules couplés. Chaque pendule n oscille dans le plan $y-z$ et est caractérisé par l'angle θ_n avec la verticale – voir schéma. Les pendules sont espacés d'une distance a le long de l'axe x. L'énergie cinétique d'un pendule est donnée par

$$T_n = \frac{I}{2}\left(\frac{d\theta_n}{dt}\right)^2,$$

où $I = ml^2$ est le moment d'inertie autour de son axe (m masse, l longueur – on néglige la masse de la tige), et son énergie potentielle dans le champ gravitationnel (constante de gravitation g) est donnée par

$$V_n = mgl(1-\cos\theta_n).$$

L'énergie de couplage entre deux pendules n et m voisins, assuré par des ressorts de torsion de constante de raideur C, est donnée par

$$U_{nm} = \frac{C}{2}(\theta_n - \theta_m)^2.$$

→ **a)** Donner le Langrangien d'une chaîne infinie de pendules.

→ **b)** Donner l'action du système.

c) Déterminer les équations du mouvement. Commenter.

Par la suite, nous allons prendre la limite continue.

d) Montrer que, sous certaines approximations, la densité Lagrangienne prend la forme

$$\mathcal{L}(\theta(x,t), \theta_t(x,t), \theta_x(x,t)) = \frac{I}{2a}\theta_t^2 - \frac{Ca}{2}\theta_x^2 - \frac{m}{a}gl(1-\cos\theta),$$

où $\theta_t = \partial\theta/\partial t$ et $\theta_x = \partial\theta/\partial x$. Spécifier les approximations utilisées.

→ **e)** Faire un calcul variationnel, $\theta \to \theta + \delta\theta$, pour déterminer les équations d'Euler-Lagrange.

f) Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2\sin\theta = 0. \qquad (1)$$

Spécifier les constantes c_0 et ω_0.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas de petites oscillations, où le problème peut-être réduit à un problème linéaire.

→ **g)** Donner l'équation du mouvement linéarisée.

h) Montrer que les solutions prennent la forme d'ondes planes, $\theta = \theta_0 e^{i(qx-\omega t)}$. Donner la dispersion $\omega(q)$.

Dans un deuxième temps, nous allons chercher des solutions du problème nonlinéaire (Eq. (**??**)) qui se déplacent à vitesse constante. Pour cela, nous posons $\theta(x,t) = f(z)$ avec $z = x - vt$, où v est une vitesse arbitraire.

→ **i)** Trouver l'équation différentielle pour $f(z)$.

j) Montrer qu'après une integration par rapport à z cette équation prend la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}\cos f + C_1,$$

où C_1 est une constante d'intégration.

→ **k)** Nous cherchons une solution spatialement localisée, tel que $f(z) \to 0 \bmod 2\pi, f'(z) \to 0$ pour $|z| \to \infty$. Déterminer la constante C_1.

l) Pour quelles valeurs de v est-ce qu'une solution existe ?

→ **m)** En intégrant l'équation différentielle pour $f(z)$, on obtient

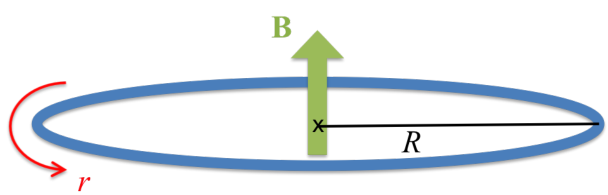
$$f(z) = 4\arctan\left\{\exp\left[\pm\frac{\omega_0}{c_0}\frac{z - z_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}\right]\right\}.$$

Tracer cette solution et identifier les échelles caractéristiques.

→ * **n)** Argumenter pourquoi la limite continue est valable seulement pour $C \gg mgl$.

---

3. Théorie de Ginzburg-Landau : Quantification du flux à travers un anneau



Nous considérons un anneau supraconducteur dans un champ magnétique – voir schéma. La fonctionnelle Ginzburg-Landau est donnée par

$$F_{\text{GL}} = \int dV \left\{\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{4m}\left|(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})\psi\right|^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right\}, \tag{2}$$

où $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$ est le paramètre d'ordre. En outre, $\vec{A}$ est le potentiel vecteur et $\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A}$.

→ **a)** Dans un premier temps, nous considérons le cas d'un paramètre d'ordre uniforme à $\vec{H} = 0$. Commenter sur les signes des coéfficients α et β et leur dépendence en température. Discuter le possibilité d'une transition de phase.

→ **b)** Pour dériver les équations de Ginzburg-Landau, nous allons déterminer le minimum de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau par un calcul variationnel. Expliquer la procédure : par rapport à quoi est-ce qu'il faut varier ?

c) Effectuer le calcul variationnel par rapport à la variation $\psi^* \to \psi^* + \delta\psi^*$.

$\to$ **d)** Le calcul variationnel par rapport à la variation $\vec{A} \to \vec{A} + \delta\vec{A}$ en combinaison avec les équations de Maxwell donne l'expression suivante pour le supercourant :

$$\vec{j}_s = -i\frac{\hbar e}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\vec{A}.$$

Simplifier cette expression en utilisant $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$. Donner l'expression pour la vitesse superfluide $\vec{v}_s = \vec{j}_s/(en_s)$ avec la densité superfluide $n_s = 2|\psi|^2$.

$\to$ **e)** Nous considérons maintenant un anneau supraconducteur de rayon R. La coordonnée le long de l'anneau est dénotée r (voir schéma). Le paramètre d'ordre doit donc être périodique : donner les relations entre les normes $|\psi(r + 2\pi R)|$ et $|\psi(r)|$ ainsi que les phases $\varphi(r + 2\pi R)$ et $\varphi(r)$.

En utilisant les résultats de d) et e), on peut montrer que

$$\frac{2m}{h}\oint d\vec{r}\cdot\vec{v}_s + \frac{2e}{hc}\phi = n \in \mathbb{Z}$$

avec $n_s = 2|\psi|^2$ et ϕ le flux à travers l'anneau.

$\to$ **f)** On note que le le supercourant circulant dans l'anneau est homogène. Exprimer v_s en fonction de ϕ, n et R.

$\to$ **g)** En substituant le résultat de f) dans l'équation trouvée en c) avec $|\psi|$ homogène, on obtient

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2\psi = 0$$

avec $\phi_0 = hc/(2e)$. Déterminer les solutions $|\psi|$ possibles.

h) Sous quelles conditions une solution $|\psi| \neq 0$ est réalisée ? Trouver la valeur de n qui minimise F_{GL}.

* **i)** Pour $\alpha = \alpha'(T/T_{c0} - 1)$, tracer la température critique T_c/T_{c0} en fonction du flux. Ici T_{c0} est la température critique à $\phi = 0$ tandis que T_c est la température critique en présence d'un flux.

* **j)** Pour quelles valeurs du flux est-ce qu'on trouve le T_c le plus bas ? Quelle est la condition pour que l'anneau reste supraconducteur pour toutes les valeurs du flux ?