EXAMEN FINAL (Corrigé) – 17 mai 2018 (3h)

1. Questions courtes. ($\sum$ = *18 points*)

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d'une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

a) *[5 points]* On considère un système avec une densité Lagrangienne $\mathcal{L}(u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t))$. Donner l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Décrire brièvement comment on l'obtient.

Solution : L'équation d'Euler-Lagrange correspondant est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} = 0.$$

On obtient cette équation en faisant un calcul variationnel $u \to u + \delta u$ de l'action $S = \int dt \int dx\ \mathcal{L}$ en supposant que $\delta u = \delta u_x = \delta u_{xx} = 0$ sur les bords d'intégration. Avec des intégrations par partie, on trouve la variation au premier ordre en δu de l'action sous la forme $\delta S = \int dt \int dx\ (...)\delta u$. Cette variation doit être nulle ce qui implique que l'impression entre paranthèses est nulle parce que δu est une fonction arbitraire.

---

b) *[2 points]* Qu'est-ce une onde solitaire ?

Solution : Une onde solitaire est une solution d'une équation nonlinéaire qui, à un temps t donné, varie seulement dans une région finie et qui se déplace à vitesse constante sans distortion de son profile.

---

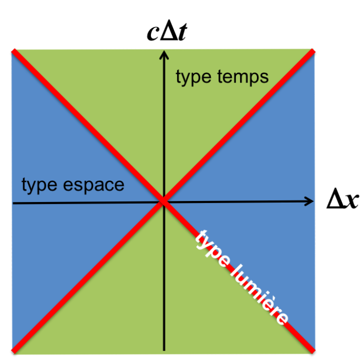
c) *[3 points]* Quelle est l'intervalle entre deux événements dans l'espace-temps ? Montrer sur un diagramme adapté ce qui correspond à une intervalle type (i) temps, (ii) lumière et (iii) espace.

Solution : L'intervalle entre deux événements dans l'espace-temps est dénotée Δs avec

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

où les t_i sont les instants quand les événements ont lieu tandis que les $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ sont leurs positions. c est la vitesse de la lumière. On parle de

- *intervalle type temps si $\Delta s^2 > 0$ (i)*
- *intervalle type lumière si $\Delta s^2 = 0$ (ii)*
- *intervalle type espace si $\Delta s^2 < 0$ (iii)*



d) *[5 points]* Donner l'action décrivant des particules chargés en présence de champs électromagnétiques. Expliquer la signification des différentes contributions.

<u>Solution</u> : L'action décrivant des particules chargés en présence de champs électromagnétiques consiste en 3 parties : $S = S_0 + S_{\text{int}} + S_{\text{champ}}$.

— S_0 *est l'action d'une particules libre :*

$$S_0 = -mc \int ds.$$

— S_{int} *décrit l'interaction champ-matière :*

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int j_\mu A^\mu d\Omega,$$

avec la densité de courant $j_\mu = \rho dx_\mu/dt$, *le potential électromagnétique* A_μ *et* $d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz$.

— S_{champ} *est l'action du champ électromagnétique donnée par*

$$S_{\text{champ}} = -\frac{c}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega$$

avec le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu} = \partial A^\mu/\partial x_\nu - \partial A^\nu/\partial x_\mu$.

---

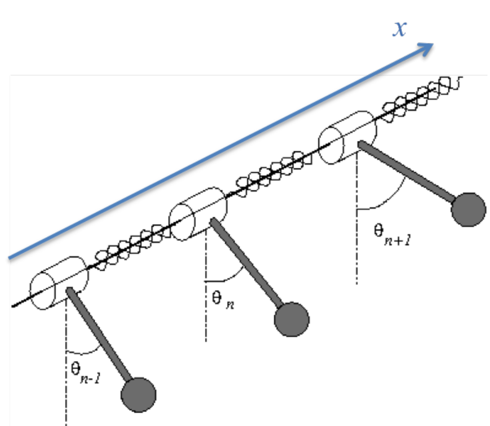
e) *[2 point]* Qu'est-ce l'invariance de jauge ?

<u>Solution</u> : Les champ électromagnétiques sont décrit par le potentail A_μ. *Comme les champs physiques sont données par des dérivés du potential, ce potentiel n'est pas unique. Une transformation de jauge change le potentiel sans changers les champs physiques – c'est ce qui s'appelle invariance de jauge. En particulier, les champs physiques sont ivariant sous la transformation* $A_\mu \to A_\mu + \partial f/\partial x^\mu$.

---

2. <u>Solitons</u> : Chaîne de pendules couplés

($\sum$ = 31(+2) points)



Nous allons considérer une chaîne de pendules couplés. Chaque pendule n oscille dans le plan $y - z$ et est caractérisé par l'angle θ_n avec la verticale – voir schéma. Les pendules sont espacés d'une distance a le long de l'axe x. L'énergie cinétique d'un pendule est donnée par

$$T_n = \frac{I}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2,$$

où $I = ml^2$ est le moment d'inertie autour de son axe (m masse, l longueur – on néglige la masse de la tige), et son énergie potentielle dans le champ gravitationnel (constante de gravitation g) est donnée par

$$V_n = mgl(1 - \cos\theta_n).$$

L'énergie de couplage entre deux pendules n et m voisins, assuré par des ressorts de torsion de constante de raideur C, est donnée par

$$U_{nm} = \frac{C}{2}(\theta_n - \theta_m)^2.$$

→ **a)** *[2 points]* Donner le Langrangien d'une chaîne infinie de pendules.

<u>Solution</u> *: Le Langrangien est obtenu en sommant la différence de l'énergie cinétique est l'énergie potentielle sur tous les pendules :*

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{I}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 - mgl(1 - \cos\theta_n) - \frac{C}{2}(\theta_{n+1} - \theta_n)^2 \right\}.$$

→ **b)** *[1 point]* Donner l'action du système.

<u>Solution</u> *: L'action est donnée par* $S = \int dt\ L$.

---

c) *[2 points]* Déterminer les équations du mouvement. Commenter.

<u>Solution</u> *: Les équations du mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange :*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \theta_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n} \\ &= -mgl\sin\theta_n + C(\theta_{n+1} - \theta_n) - C(\theta_n - \theta_{n-1}) - \frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}_n \right) \\ &= -mgl\sin\theta_n + C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) - I\ddot{\theta}_n. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées.

Par la suite, nous allons prendre la limite continue.

d) *[5 points]* Montrer que, sous certaines approximations, la densité Lagrangienne prend la forme

$$\mathcal{L}(\theta(x,t), \theta_t(x,t), \theta_x(x,t)) = \frac{I}{2a}\theta_t^2 - \frac{Ca}{2}\theta_x^2 - \frac{m}{a}gl(1 - \cos\theta),$$

où $\theta_t = \partial\theta/\partial t$ et $\theta_x = \partial\theta/\partial x$. Spécifier les approximations utilisées.

<u>Solution</u> *: On peut prendre la limite continue si les angles* θ *varient lentement sur l'échelle de la distance entre pendules. Dans ce cas, on écrit* $\theta_n = \theta(na) = \theta(x_n) \to \theta(x)$*. La somme sur* n *est remplacée par une intégrale :* $\sum_n \to a^{-1}\int dx$*. Donc le Lagrangien prend la forme*

$$L = a^{-1} \int dx \left\{ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \right)^2 - mgl(1 - \cos\theta(x,t)) - \frac{C}{2}(\theta(x+a,t) - \theta(x,t))^2 \right\}.$$

Par la suite, on développe $\theta(x+a) \approx \theta(x) + (\partial\theta/\partial x)a$ *pour obtenir*

$$L = a^{-1} \int dx \left\{ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \right)^2 - mgl(1 - \cos\theta(x,t)) - \frac{Ca^2}{2} \left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right\}.$$

En utilisant $L = \int dx\ \mathcal{L}$*, on obtient le résultat indiqué.*

→ **e)** *[5 points]* Faire un calcul variationnel, $\theta \to \theta + \delta\theta$, pour déterminer les équations d'Euler-Lagrange.

<u>Solution</u> : On varie l'action $S = \int dt \int dx\, \mathcal{L}$. En particulier, on trouve

$$\begin{aligned} S[\theta+\delta\theta] &= \int dt \int dx \left\{ \frac{I}{2a}(\theta_t + \delta\theta_t)^2 - \frac{Ca}{2}(\theta_x + \delta\theta_x)^2 - \frac{m}{a} gl(1-\cos(\theta+\delta\theta)) \right\} \\ &= S[\theta] + \int dt \int dx \left\{ \frac{I}{a}\theta_t \delta\theta_t - Ca\theta_x\delta\theta_x - \frac{m}{a} gl\sin(\theta)\delta\theta \right\} \\ &\quad + \text{termes d'ordre superieur dans la variation.} \end{aligned}$$

On demande alors que

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int dt \int dx \left\{ \frac{I}{a}\theta_t \delta\theta_t - Ca\theta_x\delta\theta_x - \frac{m}{a} gl\sin(\theta)\delta\theta \right\} \\ &= \int dt \int dx \left\{ \frac{I}{a}\theta_t \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} - Ca\theta_x\frac{\partial\delta\theta}{\partial x} - \frac{m}{a} gl\sin(\theta)\delta\theta \right\}. \end{aligned}$$

Pour les deux premiers termes, on fait une intégration par partie en utilisant que les termes de bord sont nuls :

$$0 = \delta S = \int dt \int dx \left\{ -\frac{I}{a}\frac{\partial\theta_t}{\partial t}\delta\theta + Ca\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\delta\theta - \frac{m}{a} gl\sin(\theta)\delta\theta \right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{I}{a}\frac{\partial\theta_t}{\partial t} + Ca\frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{m}{a} gl\sin(\theta) \\ &= -\frac{I}{a}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{Ca^2}{I}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{mgl}{I}\sin\theta \right). \end{aligned}$$

---

f) *[2 points]* Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2\sin\theta = 0. \tag{1}$$

Spécifier les constantes c_0 et ω_0.

<u>Solution</u> : En utilisant le résultat de e), on voit immédiatement que l'équation d'Euler-Lagrange a la forme indiquée avec

$$c_0^2 = \frac{Ca^2}{I} \qquad \text{et} \qquad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I}.$$

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas de petites oscillations, où le problème peut-être réduit à une problème linéaire.

→ **g)** *[1 point]* Donner l'équation du mouvement linéarisée.

<u>Solution</u> : La seule contribution non-linéaire est le terme $\propto \sin\theta$. En approximant $\sin\theta \approx \theta$ pour $\theta \ll 1$, on trouve

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2\theta = 0.$$

---

h) *[3 points]* Montrer que les solutions prennent la forme d'ondes planes, $\theta = \theta_0 e^{i(qx-\omega t)}$. Donner la dispersion $\omega(q)$.

Solution : En substituant $\theta = \theta_0 e^{i(qx-\omega t)}$ dans l'équation linéarisée, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta_0 e^{i(qx-\omega t)} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_0 e^{i(qx-\omega t)} + \omega_0^2 \theta_0 e^{i(qx-\omega t)} \\ &= \left(-\omega^2 + c_0^2 q^2 + \omega_0^2\right)\theta_0 e^{i(qx-\omega t)}. \end{aligned}$$

Il faut donc $-\omega^2 + c_0^2 q^2 + \omega_0^2 = 0$ ou

$$\omega(q) = \pm\sqrt{\omega_0^2 + c_0^2 q^2}.$$

Dans un deuxième temps, nous allons chercher des solutions du problème nonlinéaire (Eq. (1)) qui se déplacent à vitesse constante. Pour cela, nous posons $\theta(x,t) = f(z)$ avec $z = x - vt$, où v est une vitesse arbitraire.

$\rightarrow$ **i)** *[2 points]* Trouver l'équation différentielle pour $f(z)$.

Solution : En substituant $\theta(x,t) = f(z)$ dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} - c_0^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + \omega_0^2 \sin f \\ &= v^2 f'' - c_0^2 f'' + \omega_0^2 \sin f \end{aligned}$$

ou

$$f'' - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}\sin f = 0.$$

---

j) *[3 points]* Montrer qu'après une integration par rapport à z cette équation prend la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}\cos f + C_1,$$

où C_1 est une constante d'intégration.

Solution : On multiplie l'équation obtenue en i) par f'. Par la suite, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= f' f'' - \frac{\omega^2}{c_0^2 - v^2} f' \sin f \\ &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} f'^2\right) - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}\frac{d}{dz}\left(-\cos f\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} f'^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2 - v^2}\cos f\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2} f'^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2 - v^2}\cos f = cste.$$

$\rightarrow$ **k)** *[1 point]* Nous cherchons une solution spatialement localisée, tel que $f(z) \rightarrow 0 \bmod 2\pi, f'(z) \rightarrow 0$ pour $|z| \rightarrow \infty$. Déterminer la constante C_1.

Solution : En prenant la limite $f(z) \rightarrow 0 \bmod 2\pi, f'(z) \rightarrow 0$, on obtient

$$0 = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} + C_1 \qquad \text{ou} \qquad C_1 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}.$$

---

l) *[1 point]* Pour quelles valeurs de v est-ce qu'une solution existe ?

<u>*Solution*</u> *: L'équation prend la forme*

$$\frac{1}{2}f'^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}(1 - \cos f) = 2\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}\sin^2\frac{f}{2}.$$

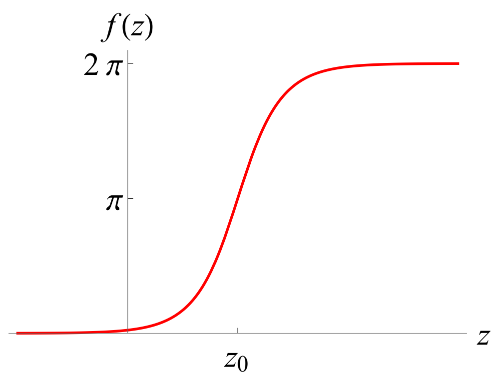
Donc il faut $\omega_0^2/(c_0^2 - v^2) > 0$ *ou* $|v| < c_0$.

$\rightarrow$ **m)** *[3 points]* En intégrant l'équation différentielle pour $f(z)$, on obtient

$$f(z) = 4\arctan\left\{\exp\left[\pm\frac{\omega_0}{c_0}\frac{z - z_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}\right]\right\}.$$

Tracer cette solution et identifier les échelles caractéristiques.

<u>*Solution*</u> *: Pour le signe + (−), la fonction* $f(z)$ *va de* 0 (2π) *pour* $z \to -\infty$ *à* 2π (0) *pour* $z \to \infty$*. Le cas + est montré sur le schéma. La variation est centrée autour de* z_0 *avec* $f(z_0) = \pi$*. L'échelle caractéristique de variation est donnée par* $L = \sqrt{1 - v^2/c_0^2}\, c_0/\omega_0$*.*



$\rightarrow$ * **n)** *[2 points]* Argumenter pourquoi la limite continue est valable seulement pour $C \gg mgl$.

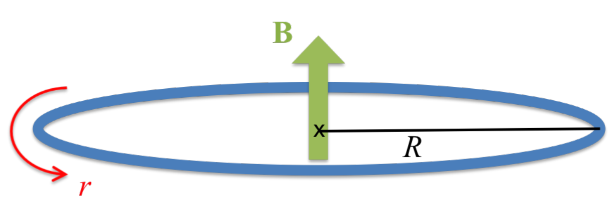
<u>*Solution*</u> *: La limite continue peut être utiliser si l'échelle de variation de* f *est plus grand que la distance entre deux pendules voisins. Donc il faut* $L \gg a$ *ou*

$$c_0/\omega = \sqrt{\frac{Ca^2}{I}\Big/\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{C}{mgl}}\,a \gg a,$$

c'est-à-dire, $C \gg mgl$*.*

---

3. <u>Théorie de Ginzburg-Landau</u> : Quantification du flux à travers un anneau *($\sum = 22$ (+5) points)*



Nous considérons un anneau supraconducteur dans un champ magnétique – voir schéma. La fonctionnelle Ginzburg-Landau est donnée par

$$F_{\rm GL} = \int dV \left\{ \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{4m}\left|(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})\psi\right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\}, \tag{2}$$

où $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$ est le paramètre d'ordre. En outre, $\vec{A}$ est le potentiel vecteur et $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$.

$\to$ **a)** *[4 points]* Dans un premier temps, nous considérons le cas d'un paramètre d'ordre uniforme à $\vec{H} = 0$. Commenter sur les signes des coéfficients α et β et leur dépendence en température. Discuter le possibilité d'une transition de phase.

Solution : Il faut $\beta > 0$ pour que $F_{\rm GL}$ possède un minimum. Si α change de signe, il y a une transition de phase. Pour $\alpha > 0$, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau est minimisée par $\psi = 0$ ce qui correspond à la phase normale. Pour $\alpha < 0$, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau est minimisée par $\psi \neq 0$ ce qui correspond à la phase supraconductrice. Donc α doit être positif pour $T > T_c$ et négatif pour $T < T_c$, où T_c est la température critique. On peut écrire $\alpha = \alpha'(T/T_c - 1)$. La dépendence en T de β peut être négligé au voisinage de la transition.

$\to$ **b)** *[2 point]* Pour dériver les équations de Ginzburg-Landau, nous allons déterminer le minimum de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau par un calcul variationnel. Expliquer la procédure : par rapport à quoi est-ce qu'il faut varier ?

Solution : On peut varier la fonctionnelle par rapport à ψ, ψ^* et par rapport à $\vec{A}$. On note que ψ et ψ^* peuvent être considérés comme deux fonctions indépendentes. Le calul variationnel suit les mêmes lignes que celui fait en 2.e).

---

c) *[3 point]* Effectuer le calcul variationnel par rapport à la variation $\psi^* \to \psi^* + \delta\psi^*$.

Solution : On écrit $F_{\rm GL}[\psi^* + \delta\psi^*] \approx F_{\rm GL}[\psi^*] + \delta F_{\rm GL}$, où $\delta F_{\rm GL}$ contient les termes en premier ordre en $\delta\psi^*$. On trouve

$$\begin{aligned} \delta F_{\rm GL} &= \int dV \left\{ \alpha\psi\delta\psi^* + \beta|\psi|^2\psi\delta\psi^* + \frac{1}{4m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})\psi(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})\delta\psi^* \right\} \\ &= \int dV \left\{ \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{4m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})^2\psi \right\} \delta\psi^*. \end{aligned}$$

Donc $\delta F_{\rm GL} = 0$ implique

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{4m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A})^2\psi = 0.$$

$\to$ **d)** *[2 point]* Le calcul variationnel par rapport à la variation $\vec{A} \to \vec{A} + \delta\vec{A}$ en combinaison avec les équations de Maxwell donne l'expression suivante pour le supercourant :

$$\vec{j}_s = -i\frac{\hbar e}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\vec{A}.$$

Simplifier cette expression en utilisant $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$. Donner l'expression pour la vitesse superfluide $\vec{v}_s = \vec{j}_s/(en_s)$ avec la densité superfludie $n_s = 2|\psi|^2$.

Solution : Avec $\vec{\nabla}\psi = (\vec{\nabla}|\psi|)e^{i\varphi} + i|\psi(\vec{\nabla}\varphi)e^{i\varphi}$ et $\vec{\nabla}\psi^* = (\vec{\nabla}|\psi|)e^{-i\varphi} - i|\psi(\vec{\nabla}\varphi)e^{-i\varphi}$, on trouve

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar e}{m}|\psi|^2\vec{\nabla}\varphi - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\vec{A} = \frac{\hbar e n_s}{2m}\left(\vec{\nabla}\psi - \frac{2e}{\hbar c}\vec{A}\right).$$

Donc

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{2m}\left(\vec{\nabla}\psi - \frac{2e}{\hbar c}\vec{A}\right).$$

$\rightarrow$ **e)** *[2 points]* Nous considérons maintenant un anneau supraconducteur de rayon R. La coordonnée le long de l'anneau est dénotée r (voir schéma). Le paramètre d'ordre doit donc être périodique : donner la relations entre les normes $|\psi(r+2\pi R)|$ et $|\psi(r)|$ ainsi que les phases $\varphi(r+2\pi R)$ et $\varphi(r)$.

Solution : La condition de périidocité impose $|\psi(r+2\pi R)| = |\psi(r)|$ et $\varphi(r+2\pi R) = \varphi(r) + 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

En utilisant les résultats de d) et e), on peut montrer que

$$\frac{2m}{h}\oint d\vec{r}\cdot\vec{v}_s + \frac{2e}{hc}\phi = n \in \mathbb{Z}$$

avec $n_s = 2|\psi|^2$ et ϕ le flux à travers l'anneau.

$\rightarrow$ **f)** *[3 points]* On note que le le supercourant circulant dans l'anneau est homogène. Exprimer v_s en fonction de ϕ, n et R.

Solution : Comme $d\vec{r}$ et $\vec{v}_s$ sont parallèles et $v_s = cste$, on obtient $\oint d\vec{r}\cdot\vec{v}_s = 2\pi R v_s$, où $2\pi R$ est la circonférence de l'anneau. Donc

$$\frac{4\pi m R}{h}v_s + \frac{2e}{hc}\phi = n \qquad \text{ou} \qquad v_s = \frac{\hbar}{2mR}\left(n - \frac{2e}{hc}\phi\right).$$

$\rightarrow$ **g)** *[3 point]* En substituant le résultat de f) dans l'équation trouvée en c) avec $|\psi|$ homogène, on obtient

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2\psi = 0$$

avec $\phi_0 = hc/(2e)$. Déterminer les solutions $|\psi|$ possibles.

Solution : Soit $|\psi| = 0$, soit

$$\alpha + \beta|\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad |\psi|^2 = -\frac{1}{\beta}\left\{\alpha + \frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2\right\},$$

où la deuxième solution existe seulement pour

$$\alpha < -\frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2.$$

---

h) *[3 point]* Sous quelles conditions une solution $|\psi| \neq 0$ est réalisée ? Trouver la valeur de n qui minimise F_{GL}.

Solution : Si la solution $\psi \neq 0$ existe, $F_{\text{GL}}[\psi \neq 0] < F_{\text{GL}}[0]$. Il faut donc

$$\alpha < \max_n\left\{-\frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2\right\}.$$

Le maximum est réalise quand n est l'entier le plus proche de ϕ/ϕ_0. En variant le flux, n change de $+1$ quand ϕ/ϕ_0 est demi-entier.

---

* **i)** *[3 points]* Pour $\alpha = \alpha'(T/T_{c0} - 1)$, tracer la température critique T_c/T_{c0} en fonction du flux. Ici T_{c0} est la température critique à $\phi = 0$ tandis que T_c est la température critique en présence d'un flux.

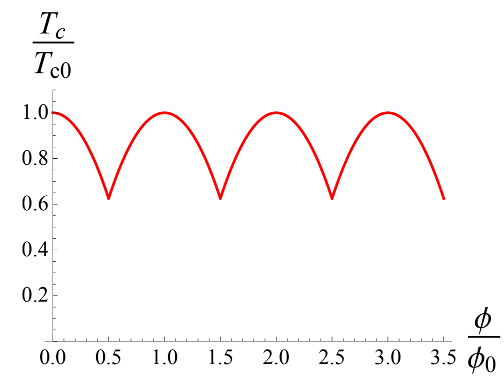
<u>Solution</u> : La température critique est donnée par la condition

$$\alpha(T_c) = \max_n \left\{ -\frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2 \right\}.$$

Donc

$$\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 + \frac{1}{\alpha'}\max_n \left\{ -\frac{\hbar^2}{4mR^2}\left(\frac{\phi}{\phi_0} - n\right)^2 \right\}.$$

On obtient donc une variation périodique de T_c avec le flux.



A noter : Ici nous avons négligé l'épaisseur de l'anneau. Le champ magnétique qui perce le matériau supraconducteur mène à une suppression supplémentaire de T_c quand le champ augemente.

---

* **j)** *[2 points]* Pour quelles valeurs du flux est-ce qu'on trouve le T_c le plus bas ? Quelle est la condition pour que l'anneau reste supraconducteur pour toutes les valeurs du flux ?

<u>Solution</u> : Le T_c minimal est atteint quand ϕ/ϕ_0 est demi-entier. Dans ce cas

$$\frac{T_c}{T_{c0}} = 1 - \frac{\hbar^2}{16mR^2\alpha'}.$$

L'anneau reste supraconducteur pour toutes les valeurs du flux si cette valeur est positive, c'est à-dire, si $R > \hbar/(4\sqrt{m\alpha'})$.
