Université Grenoble Alpes — Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistére — Wiebke Guichard (wiebke.guichard@neel.cnrs.fr)

EXAMEN FINAL – 17 mai 2017 (3h)

Modalités : 1 feuille A4 recto-verso manuscrite permise.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous conviennent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

---

1. <u>Solitons :</u> Vagues extrêmes dans des eaux peu profondes. - L'équation Korteweg-de Vries.

L'équation de Korteweg-de Vries,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + 6\phi\frac{\partial}{\partial x}\phi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\phi = 0, \tag{1}$$

peut décrire des vagues à faible profondeur. Ici $\phi(x,t)$ est la variation de la hauteur de la surface de l'eau.

a) On considère la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\psi)(\frac{\partial}{\partial x}\psi) + (\frac{\partial}{\partial x}\psi)^3 - \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi)^2.$$

Donner l'expression pour l'action correspondante.

b) Minimiser l'action pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange.

c) Montrer que $\phi = \partial\psi/\partial x$ obéit à l'équation Korteweg-de Vries.

$\rightarrow$ **d)** Montrer que l'équation de Korteweg-de Vries permet des solutions de la forme $\phi(x,t) = f(x - vt)$.

e) Montrer que f est déterminé par l'équation

$$f'' = A + vf - 3f^2,$$

où A est une constante. Interpréter cette équation comme une équation de mouvement fictive. Discuter les solutions possibles.

$\rightarrow$ **f)** Vérifier que

$$f(z) = \frac{v}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right],$$

est une solution. Donner la valeur de A correspondante.

$\rightarrow$ **g)** Tracer schématiquement la solution. Indiquer la hauteur, la largeur et la vitesse de propagation.

$\rightarrow$ **h)** Est-ce que la superposition de deux solitons avec vitesses différentes,

$$\phi_{2S}(x,t) = \frac{v_1}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v_1}(x - v_1t - x_1)\right] + \frac{v_2}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v_2}(x - v_2t - x_2)\right],$$

est aussi une solution (approximative ?) de l'équation de Korteweg-de Vries ? Sous quelles conditions ? On note que ce n'est pas nécessaire de calculer tous les termes.

2. Le champ électromagnétique : Transformations de Lorentz du tenseur-électromagnétique.

Un quadri-vecteur C^μ transforme selon la transformation de Lorentz comme

$$C^0 = \gamma\left(C'^0 + \frac{v}{c}C'^1\right), \quad C^1 = \gamma\left(C'^1 + \frac{v}{c}C'^0\right), \quad C^2 = C'^2, \quad C^3 = C'^3,$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Où, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} C^0 \\ C^2 \\ C^2 \\ C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & & \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'^0 \\ C'^2 \\ C'^2 \\ C'^3 \end{pmatrix} \equiv (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} C'^0 \\ C'^2 \\ C'^2 \\ C'^3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer $\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu$. Donner la forme matricielle de $\Lambda^\mu{}_\nu$.

b) Comment est-ce que se transforme le quadrivecteur $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$? Donner l'expression pour ∂'_μ.

→ **c)** Qu'est-ce un quadri-tenseur de rang 2 ? Comment transforme un tel quadri-tenseur ?

→ **d)** Quelles quantités sont invariantes sous transformations de Lorentz ?

→ **e)** On s'intéresse au tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Montrer qu'il s'agit d'un tenseur antisymétrique. Qu'est-ce l'invariance de jauge ?

f) La forme matricielle du tenseur électromagnétique est donnée par

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $F'^{\mu\nu}$.

g) Les combinaisons $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ ainsi que $\vec{E} \cdot \vec{B}$ sont invariantes sous transformations de Lorentz. On considère les cas suivants :

1. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 10Q)$
2. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 0.1Q)$
3. $\vec{E} = (0, Q, Q)$, $\vec{B} = (0, 2Q, 0)$

Pour les 3 cas, répondre aux questions suivantes : Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{E} = 0$? Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{B} = 0$? Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ? Le cas échéant, donner la vitesse relative entre les 2 référentiels ainsi que les expressions pour $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$.

→ **h)** L'action du champ électromagnétique est donnée par $S_{EM} = S_{\text{int}} + S_{\text{champ}}$ avec

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu, \qquad S_{\text{champ}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d\Omega.$$

Qu'est-ce que les deux contributions décrivent ? Qu'est-ce qui détermine leur forme ?

3. <u>Théorie de Ginzburg-Landau :</u> Système magnétique bidimensionnel avec interactions de Dzyaloshinskii-Moriya.

Nous allons étudier un système magnétique à deux dimensions (de taille $L \times L$) avec un couplage spin-orbite. L'aimantation est donné par un vecteur $\vec{M}(x,y) = (M_x(x,y), M_y(x,y), M_z(x,y))$. La fonctionnelle de Ginzburg-Landau prend la forme

$$
\begin{aligned}
G[\vec{M}] &= \int dx\, dy\, \mathcal{G}(\vec{M}, \frac{\partial}{\partial x}\vec{M}, \frac{\partial}{\partial y}\vec{M}) && (2)\\
&= \int dx\, dy \left\{ \frac{c}{2} \sum_{i=x,y,z} (\vec{\nabla} M_i)^2 + a_2 \vec{M}^2 + a_4 \vec{M}^4 + D\vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \right\}, && (3)
\end{aligned}
$$

où le terme $\propto D$ décrit les interactions de Dzyaloshinskii-Moriya dûes au couplage spin-orbite.

<u>On considère d'abord le cas $D = 0$.</u>

a) Discuter les symétries du système.

$\rightarrow$ **b)** Minimiser la fonctionnelle $G[\vec{M}]$. Expliciter les étapes du calcul.

c) Montrer qu'il y a une transition de phase à $a_2 = 0$. Faire un sketch du potentiel $\mathcal{G}(\vec{M})$ (où $\vec{M}$ uniforme) pour $a_2 > 0$ et pour $a_2 < 0$.

d) Déterminer l'aimantation $\vec{M}_0$ pour $a_2 < 0$. Quelle symétrie est brisée ? Est-ce qu'il y a des dégénéréscences ?

$\rightarrow$ **e)** Quelle est l'échelle caractéristique de variations de l'aimantation ?

<u>Par la suite, on considère le cas $D \neq 0$.</u>

$\rightarrow$ **f)** Comment est-ce que l'équation différentielle pour les configurations $\vec{M}$ qui extremisent la fonctionnelle $G[\vec{M}]$ est modifiée ?

$\rightarrow$ **g)** On choisit

$$\vec{M}_0(\mathbf{r}) = \phi \left[\cos(q_0\, \vec{\nu} \cdot \vec{r}) \vec{\eta}_c + \sin(q_0\, \vec{\nu} \cdot \vec{r}) \vec{\eta}_s \right],$$

où $\vec{\eta}_c \perp \vec{\eta}_s$ sont des vecteurs unitaires ($\vec{\eta}_c^2 = \vec{\eta}_s^2 = 1$) et $\vec{\nu} = \vec{\eta}_c \times \vec{\eta}_s = (\nu_x, \nu_y, 0)$.
Expliquer ce que cette équation décrit.

$\rightarrow$ **h)** En substituant $\vec{M}_0(\mathbf{r})$ dans la fonctionnelle $G[\vec{M}]$, on obtient

$$G[\vec{M}_0] = L^2 \left[\frac{c}{2} q_0^2 \phi^2 + a_2 \phi^2 + a_4 \phi^4 - D q_0 \phi^2 \right].$$

Trouver les valeurs q_0 et ϕ qui minimisent $G[\vec{M}_0]$.

i) A quelle valeur de a_2 a lieu la transition de phase ?