Université Grenoble Alpes — Julia Meyer (julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)
M1 Physique / Magistére — Wiebke Guichard (wiebke.guichard@neel.cnrs.fr)
Théorie des champs classiques – http ://inac.cea.fr/pisp/julia.meyer/tcc.html

EXAMEN FINAL (Corrigé) – 17 mai 2017 (3h)

1. Solitons : Vagues extrêmes dans des eaux peu profondes. - L'équation de Korteweg-de Vries. *($\sum$ = 22 points)*

L'équation de Korteweg-de Vries,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + 6\phi\frac{\partial}{\partial x}\phi + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\phi = 0, \tag{1}$$

peut décrire des vagues à faible profondeur. Ici $\phi(x,t)$ est la variation de la hauteur de la surface de l'eau.

a) *[1 point]* On considère la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\psi)(\frac{\partial}{\partial x}\psi) + (\frac{\partial}{\partial x}\psi)^3 - \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi)^2.$$

Donner l'expression pour l'action correspondante.

Solution : L'action est donnée par

$$S[\psi] = \int dt \int dx\ \mathcal{L}(\psi_t, \psi_x, \psi_{xx}).$$

---

b) *[4 points]* Minimiser l'action pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange.

Solution : L'équation d'Euler-Lagrange est donnée par

$$-\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_t} - \partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_x} + \partial_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{xx}} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}\partial_t\psi_x - \frac{1}{2}\partial_x\psi_t - 3\partial_x\psi_x^2 - \partial_x^2\psi_{xx} \\ &= -\partial_t\psi_x - 6\psi_x\partial_x\psi_x - \partial_x^3\psi_x. \end{aligned}$$

---

c) *[1 point]* Montrer que $\phi = \partial\psi/\partial x$ obéit à l'équation de Korteweg-de Vries.

Solution : En remplaçant $\psi_x \to \phi$ dans le résultat de b), on retrouve immédiatement l'équation de Korteweg-de Vries.

→ **d)** *[3 points]* Montrer que l'équation de Korteweg-de Vries permet des solutions de la forme $\phi(x,t) = f(x-vt)$.

Solution : Avec $\phi(x,t) = f(x-vt)$, on obtient

$$\partial_t\phi = -vf', \qquad \partial_x\phi = f'.$$

Donc

$$\partial_t\phi + 6\phi\partial_x\phi + \partial_x^3\phi = -vf' + 6ff' + f''' = 0.$$

C.a.d. les solutions de l'équation $-vf' + 6ff' + f''' = 0$ sont des solutions de l'équation de Korteweg-de Vries.

e) *[5 points]* Montrer que f est déterminé par l'équation

$$f'' = A + vf - 3f^2,$$

où A est une constante. Interpréter cette équation comme une équation de mouvement fictive. Discuter les solutions possibles.

<u>Solution</u> : Avec

$$-vf' + 6ff' + f''' = \partial_z \left\{-vf + 3f^2 + f''\right\} = 0,$$

on obtient

$$-vf + 3f^2 + f'' = cste,$$

ce qui est l'équation indiquée.
L'équation a donc la forme d'une équation du mouvement fictive, où la variable z correspond au temps et f joue le rôle de la position. La force $F(f) = A + vf - 3f^2$ peut être attribuée à un potentiel

$$U(f) = -Af - \frac{1}{2}vf^2 + f^3 + c,$$

tel que $F = -\partial_f U$.
Pour $f \to -\infty$ le potentiel tend vers $-\infty$, tandis que pour $f \to \infty$, le potentiel tend vers ∞. Il a des extrema à

$$f_\pm = \frac{v}{6} \pm \sqrt{\frac{v^2}{36} + \frac{A}{3}}$$

pour $A > -v^2/12$.
Pour des énergies $U(f_+) \le E \le U(f_-)$, on peut trouver des solutions bornées. Pour toutes autres valuers de l'énergie, il n'y a que des solutions où f tend vers $-\infty$ pour $z \to \infty$, ce qui n'est pas physique. Pour $E = U(f_-)$, il y a une solutions où f commence à f_- à $z \to -\infty$ et finit à f_- à $z \to \infty$.

$\to$ **f)** *[2 points]* Vérifier que

$$f(z) = \frac{v}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right],$$

est une solution. Donner la valeur de A correspondante.

<u>Solution</u> : Avec

$$\begin{aligned}
f' &= -\frac{v^{3/2}}{2}\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right]\cosh^{-3}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right], \\
f'' &= -\frac{v^2}{4}\left\{\cosh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right] - 3\sinh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right]\right\}\cosh^{-4}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(z - z_0)\right],
\end{aligned}$$

on trouve

$$-\frac{v^2}{2}\cosh^{-2} + \frac{3v^2}{4}\cosh^{-4} - \frac{v^2}{4}\left\{\cosh^2 - 3(\cosh^2 - 1)\right\}\cosh^{-4} = 0$$

et donc $A = 0$.

$\to$ **g)** *[3 points]* Tracer schématiquement la solution. Indiquer la hauteur, la largeur et la vitesse de propagation.

<u>Solution</u> : La hauteur est $v/2$, la largeur est $\sim 1/\sqrt{v}$ et la vitesse de propagation est v.

→ **h)** *[3 points]* Est-ce que la superposition de deux solitons avec vitesses différentes,

$$\phi_{2S}(x,t) = \frac{v_1}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v_1}(x - v_1 t - x_1)\right] + \frac{v_2}{2}\cosh^{-2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{v_2}(x - v_2 t - x_2)\right],$$

est aussi une solution (approximative ?) de l'équation de Korteweg-de Vries ? Sous quelles conditions ? On note que ce n'est pas nécessaire de calculer tous les termes.

<u>Solution</u> : *Il suffit de considérer la contribution qui mélange les deux solitons dans le terme non-linéaire* $6\phi\phi_x$*. C'est-à-dire, avec* $\phi_{2S} = \phi_{v_1} + \phi_{v_2}$ *et* $X_i = \sqrt{v_i}(x - v_i t - x_i)/2$*,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi_{2S} + 6\phi_{2S}\frac{\partial}{\partial x}\phi_{2S} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\phi_{2S} &= 6\phi_{v_1}\frac{\partial}{\partial x}\phi_{v_2} + 6\phi_{v_2}\frac{\partial}{\partial x}\phi_{v_1} \\
&= -\frac{3v_1 v_2^{3/2}}{2}\frac{\sinh[X_2]}{\cosh^2[X_1]\cosh^3[X_2]} - \frac{3v_2 v_1^{3/2}}{2}\frac{\sinh[X_1]}{\cosh^2[X_2]\cosh^3[X_1]}.
\end{aligned}$$

Ce résultat tend vers zéro pour $X_1 \gg 1$ *ou* $X_2 \gg 1$*. Donc la superposition de 2 solitons est une solution quand les deux solitons sont bien séparés tel que partout soit* X_1 *soit* X_2 *est large.*

Information supplémentaire : Une solution exacte à deux solitons existe. Quand les deux solitons s'approchent leur forme est modifée (voir Peyrard & Dauxois), mais la formule ci-dessus donne le résultat asymptotique avec des x_i *qui sont différents pour* $t \to \pm\infty$*.*

---

2. <u>Le champ électromagnétique :</u> Transformations de Lorentz du tenseur-électromagnétique.
($\sum = 22$ points)

Un quadri-vecteur C^μ transforme selon la transformation de Lorentz comme

$$C^0 = \gamma\left(C'^0 + \frac{v}{c}C'^1\right), \quad C^1 = \gamma\left(C'^1 + \frac{v}{c}C'^0\right), \quad C^2 = C'^2, \quad C^3 = C'^3,$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Où, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} C^0 \\ C^2 \\ C^2 \\ C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & & \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'^0 \\ C'^2 \\ C'^2 \\ C'^3 \end{pmatrix} \equiv (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} C'^0 \\ C'^2 \\ C'^2 \\ C'^3 \end{pmatrix}.$$

a) *[2 points]* Montrer $\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu$. Donner la forme matricielle de $\Lambda^\mu{}_\nu$.

<u>Solution</u> : *On trouve*

$$(\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & & \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

En outre,

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & & \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & & \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & & \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & & \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Donc

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & & \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

---

b) *[2 points]* Comment est-ce que se transforme le quadrivecteur $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$? Donner l'expression pour ∂'_μ.

Solution : La transformation est donnée par

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu = \Big(\gamma(c\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial x}), \gamma(\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial t}), \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big).$$

→ **c)** *[2 points]* Qu'est-ce un quadri-tenseur de rang 2 ? Comment transforme un tel quadri-tenseur ?

Solution : Un quadri-tenseur est obtenu en combinant deux quadri-vecteurs : $X^{\mu\nu} = C^\mu D^\nu$. Ses transformation suivent des transformations des quadri-vecteurs. Donc

$$X'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\kappa X^{\lambda\kappa}.$$

→ **d)** *[1 point]* Quelles quantités sont invariantes sous transformations de Lorentz ?

Solution : Les quadri-scalaires sont invariantes sous transformations de Lorentz.

→ **e)** *[2 points]* On s'intéresse au tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Montrer qu'il s'agit d'un tenseur antisymétrique. Qu'est-ce l'invariance de jauge ?

Solution : On voit facilement que $A^{\nu\mu} = -A^{\mu\nu}$. Donc le tenseur est antisymétrique.
L'invariance de jauge implique qu'on peut modifier A^μ sans modifier la physique.

---

f) *[4 points]* La forme matricielle du tenseur électromagnétique est donnée par

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $F'^{\mu\nu}$.

Solution : On obtient

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & \gamma(-E_y + \frac{v}{c}B_z) & \gamma(-E_z - \frac{v}{c}B_y) \\ E_x & 0 & \gamma(-B_z + \frac{v}{c}E_y) & \gamma(B_y + \frac{v}{c}E_z) \\ \gamma(E_y - \frac{v}{c}B_z) & \gamma(B_z - \frac{v}{c}E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \frac{v}{c}B_y) & \gamma(-B_y - \frac{v}{c}E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

---

g) *[6 points]* Les combinaisons $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ ainsi que $\vec{E}\cdot\vec{B}$ sont invariantes sous transformations de Lorentz. On considère les cas suivants :

1. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 10Q)$
2. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 0.1Q)$
3. $\vec{E} = (0, Q, Q)$, $\vec{B} = (0, 2Q, 0)$

Pour les 3 cas, répondre aux questions suivantes : Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{E} = 0$? Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{B} = 0$? Est-ce qu'on peut trouver un référentiel où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ? Le cas échéant, donner la vitesse relative entre les 2 référentiels ainsi que les expressions pour $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$.

Solution :

1. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 10Q)$
$\vec{E} \perp \vec{B}$ et $|\vec{E}| < |\vec{B}|$: Donc on peut trouver un référentiel où $\vec{E}' = 0$. Avec $\vec{E}' = \gamma Q(0, 1-10v/c, 0)$ et $\vec{B}' = \gamma Q(0, 0, 10 - v/c)$, on trouve $v = c/10$ et $\vec{B}' = (0, 0, \sqrt{99}\, Q)$.

2. $\vec{E} = (0, Q, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 0.1Q)$
$\vec{E} \perp \vec{B}$ et $|\vec{E}| > |\vec{B}|$: Donc on peut trouver un référentiel où $\vec{B}' = 0$. Avec $\vec{E}' = \gamma Q(0, 1-0.1v/c, 0)$ et $\vec{B}' = \gamma Q(0, 0, 0.1 - v/c)$, on trouve $v = c/10$ et $\vec{E}' = (0, \sqrt{0.99}\, Q, 0)$.

3. $\vec{E} = (0, Q, Q)$, $\vec{B} = (0, 2Q, 0)$
$\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$: Donc on peut trouver un référentiel où $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$. Avec $\vec{E}' = \gamma Q(0, 1, 1 + 2v/c)$ et $\vec{B}' = \gamma Q(0, 2 + v/c, -v/c)$, on trouve $v = (-3 + \sqrt{5})c/2$ et $\vec{E}' = \gamma Q(0, 1, -2 + \sqrt{5}) = 2\vec{B}'/(1 + \sqrt{5})$.

→ **h)** *[3 points]* L'action du champ électromagnétique est donnée par $S_{EM} = S_{\text{int}} + S_{\text{champ}}$ avec

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu, \qquad S_{\text{champ}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d\Omega.$$

Qu'est-ce que les deux contributions décrivent ? Qu'est-ce qui détermine leur forme ?

<u>Solution</u> : L'action S_{int} décrit l'interaction matière-champ. Sa forme est déterminée par le fait qu'il doit s'agir d'un quadri-scalaire et qu'elle ne peut pas dépendre de x^μ à cause de l'homogénéité de l'espace. L'action S_{champ} décrit le champ dans le vide. Sa forme est est déterminée par le fait qu'il doit s'agir d'un quadri-scalaire et qu'elle doit être quadratique dans le champ pour obéir au principe de superposition.

---

3. <u>Théorie de Ginzburg-Landau :</u> Système magnétique bidimensionnel avec interactions de Dzyaloshinskii-Moriya. *($\sum = 21$ points)*

Nous allons étudier un système magnétique à deux dimensions (de taille $L \times L$) avec un couplage spin-orbite. L'aimantation est donné par un vecteur $\vec{M}(x, y) = (M_x(x, y), M_y(x, y), M_z(x, y))$. La fonctionnelle de Ginzburg-Landau prend la forme

$$G[\vec{M}] = \int dx\, dy\, \mathcal{G}(\vec{M}, \frac{\partial}{\partial x}\vec{M}, \frac{\partial}{\partial y}\vec{M}) \tag{2}$$

$$= \int dx\, dy \left\{ \frac{c}{2} \sum_{i=x,y,z} (\vec{\nabla} M_i)^2 + a_2 \vec{M}^2 + a_4 \vec{M}^4 + D\vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \right\}, \tag{3}$$

où le terme $\propto D$ décrit les interactions de Dzyaloshinskii-Moriya dûes au couplage spin-orbite.

<u>On considère d'abord le cas $D = 0$.</u>

a) *[2 points]* Discuter les symétries du système.

<u>Solution</u> : Le système possède une symétrie de rotation autour d'un axe arbitraire.

→ **b)** *[4 points]* Minimiser la fonctionnelle $G[\vec{M}]$. Expliciter les étapes du calcul.

<u>Solution</u> : On varie $M \to M + \epsilon m$ est calcule le terme δG linéaire en ϵ :

$$\begin{aligned}
\delta G &= \epsilon \int dx\, dy \left\{ c \sum_{i=x,y,z} \vec{\nabla} M_i \vec{\nabla} m_i + 2a_2 \vec{M} \cdot \vec{m} + 4a_4 \vec{M}^2 \vec{M} \cdot \vec{m} \right\} \\
&= \epsilon \int dx\, dy \left\{ -c \sum_{i=x,y,z} \vec{\nabla}^2 M_i m_i + 2a_2 \vec{M} \cdot \vec{m} + 4a_4 \vec{M}^2 \vec{M} \cdot \vec{m} \right\} \\
&= \epsilon \int dx\, dy \left\{ -c\Delta \vec{M} + 2a_2 \vec{M} + 4a_4 \vec{M}^3 \right\} \cdot \vec{m} = 0,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $\vec{m} = 0$ sur les bords. Comme $\vec{m}$ est aritraire sinon, on trouve

$$-c\Delta\vec{M} + 2a_2\vec{M} + 4a_4\vec{M}^3 = 0.$$

---

c) *[3 points]* Montrer qu'il y a une transition de phase à $a_2 = 0$. Faire un sketch du potentiel $\mathcal{G}(\vec{M})$ (où $\vec{M}$ uniforme) pour $a_2 > 0$ et pour $a_2 < 0$.

Solution : Si $\vec{M}$ est uniforme, le resultat de b) se réduit à

$$2(a_2 + 2a_4\vec{M}^2)\vec{M} = 0.$$

Donc $\vec{M} = 0$ ou $a_2 + 2a_4\vec{M}^2 = 0$. La deuxìeme solution existe seulement pour $a_2 < 0$. (On note que le coéfficient a_4 est toujours positif.)
Pour $a_2 > 0$, $\vec{M} = 0$ correspond à un minimum de $G[\vec{M}]$. Pour $a_2 < 0$, $\vec{M} = 0$ devient un maximum et on trouve un minimum pour $\vec{M} \neq 0$. Par conséquent, il y a une transition de phase d'une phase non-magnétique à $a_2 > 0$ à une phase magnétique à $a_2 < 0$.

---

d) *[3 points]* Déterminer l'aimantation $\vec{M}_0$ pour $a_2 < 0$. Quelle symétrie est brisée ? Est-ce qu'il y a des dégénéréscences ?

Solution : Pour $a_2 < 0$, l'aimantation est donnée par $|\vec{M}| = \sqrt{-a_2/(2a_4)}$. Le système est ferromagnétique et brise la symétrie de rotation. Par contre, seulement l'amplitude de $\vec{M}$ est fixée – toutes les directions correspondent à la même valeur de $G[\vec{M}]$.

$\rightarrow$ **e)** *[1 point]* Quelle est l'échelle caractéristique de variations de l'aimantation ?

Solution : En comparant les coéfficients des termes $\sim (\vec{\nabla} M_i)^2$ et $\sim M_i^2$, on trouve l'échelle caractéristique $\xi = \sqrt{c/(2|a_2|)}$.

Par la suite, on considère le cas $D \neq 0$.

$\rightarrow$ **f)** *[2 points]* Comment est-ce que l'équation différentielle pour les configurations $\vec{M}$ qui extremisent la fonctionnelle $G[\vec{M}]$ est modifiée ?

Solution : Pour répondre à cette question, il faut varier la contribution $G_{DM}[\vec{M}] = D\int dx\, dy\, \vec{M}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{M})$ das la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Au premier ordre en ϵ, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta G_{DM}[\vec{M}] &= \epsilon D \int dx\, dy\, \left\{\vec{m}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{M}) + \vec{M}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{m})\right\} \\
&= \epsilon D \int dx\, dy\, \left\{\vec{m}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{M}) + \epsilon_{ijk} M_i \partial_{x_j} m_k\right\} \\
&= \epsilon D \int dx\, dy\, \left\{\vec{m}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{M}) - \epsilon_{ijk}(\partial_{x_j} M_i) m_k\right\} = 2\epsilon D \int dx\, dy\, \vec{m}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{M}).
\end{aligned}$$

Donc l'équation différentielle à $D \neq 0$ est donnée par

$$-c\Delta\vec{M} + 2a_2\vec{M} + 4a_4\vec{M}^3 + 2D\vec{\nabla}\times\vec{M} = 0.$$

$\rightarrow$ **g)** *[2 points]* On choisit

$$\vec{M}_0(\mathbf{r}) = \phi\left[\cos(q_0\,\vec{\nu}\cdot\vec{r})\vec{\eta}_c + \sin(q_0\,\vec{\nu}\cdot\vec{r})\vec{\eta}_s\right],$$

où $\vec{\eta}_c \perp \vec{\eta}_s$ sont des vecteurs unitaires ($\vec{\eta}_c^2 = \vec{\eta}_s^2 = 1$) et $\vec{\nu} = \vec{\eta}_c \times \vec{\eta}_s = (\nu_x, \nu_y, 0)$.
Expliquer ce que cette équation décrit.

Solution : Cette solution décrit une aimantation hélicale. L'amplitude $|\vec{M}_0| = \phi$ est constante. Comme le vecteur $\vec{\nu}$ est dans le plan 2D du système, les vecteurs $\vec{\eta}_c$ et $\vec{\eta}_s$ décrivent un plan perpendiculaire au système. L'aimantation tourne dans ce plan. En particualier, elle est constante si on se déplace perpendiculaire au vectuer ν, tandis qu'elle fait un tour si on se déplace parallèle au vecteur ν de $\delta r = 2\pi/q_0$.

$\rightarrow$ **h)** *[3 points]* En substituant $\vec{M}_0(\mathbf{r})$ dans la fonctionnelle $G[\vec{M}]$, on obtient

$$G[\vec{M}_0] = L^2\left[\frac{c}{2}q_0^2\phi^2 + a_2\phi^2 + a_4\phi^4 - Dq_0\phi^2\right].$$

Trouver les valeurs q_0 et ϕ qui minimisent $G[\vec{M}_0]$.

Solution : Pour minimiser $G[\vec{M}_0]$, on prend des dérivées par rapport à ϕ et q_0 :

$$\begin{aligned}\partial_\phi G &= L^2\left[\left(cq_0^2 + 2a_2 - 2Dq_0\right)\phi + 4a_4\phi^3\right],\\ \partial_{q_0} G &= L^2\left[cq_0\phi^2 - D\phi^2\right].\end{aligned}$$

Il existe un extremum pour $\phi = 0$. Dans ce cas, q_0 ne joue pas de roule. Il existe un autre extremum avec

$$q_0 = D/c \quad \text{et} \quad \phi = \sqrt{-(cq_0^2 + 2a_2 - 2Dq_0)/(4a_4)} = \sqrt{-(2a_2 - D^2/c)/(4a_4)},$$

si $2a_2 - D^2/c < 0$. En substituant cette solution dans G, on trouve qu'il s'agit d'un minimum.

---

i) *[1 point]* A quelle valeur de a_2 a lieu la transition de phase ?

Solution : La transition de phase a lieu à $a_2 = D^2/(2c)$.