

## DM (CC)

“Théorie des champs classiques” 2019/2020

à rendre par email à [julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr)

avant le 16 mai 2020 à 18h

---

— **Le DM est un travail individuel !**

Il est obligatoire de recopier l’engagement d’intégrité intellectuelle suivant sur votre copie et de le signer :

**Je soussigné-e, (nom et prénom), m’engage à effectuer seul-e mon évaluation, selon les modalités diffusées par l’enseignant. Je suis conscient-e que toute ressemblance avec une autre composition peut être suspectée de plagiat.**

- Si possible, rendez votre travail dans un seul fichier pdf.
  - La copie n’est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
  - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche ( $\rightarrow$ ).
- 

**Le DM a été noté sur 71 points.**

---

## 1 Questions courtes ( $\sim 15\% = 10$ points)

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d’une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1.  $\rightarrow$  On considère une densité Lagrangienne de la forme

$$\mathcal{L}(q_t(\vec{r}, t), q_x(\vec{r}, t), q_y(\vec{r}, t), q_{xxx}(\vec{r}, t)),$$

où  $q(\vec{r}, t)$  est un champ scalaire. Donner l’équation d’Euler-Lagrange. Ecrire seulement les termes qui peuvent être non-nuls.

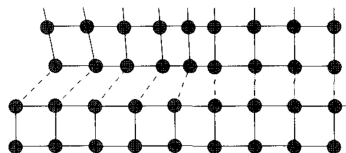
2.  $\rightarrow$  Justifier la forme du Lagrangien relativiste (dépendance des variables, préfacteur) d’une particule libre

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

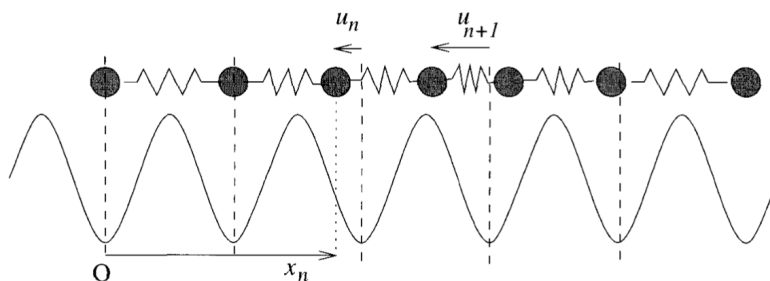
3.  $\rightarrow$  Quels sont les invariants quadratiques du champ électromagnétique ? Expliquer pourquoi seulement une des deux apparaît dans l’action du champ électromagnétique.

## 2 Dislocations dans des cristaux ( $\sim 50\% = 36$ points)

En science des matériaux, une dislocation est un défaut linéaire correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Le schéma ci-dessous montre une dislocation "coin". On y voit la déformation d'une couche atomique par rapport à la couche en dessous : les atomes d'un côté de la dislocation (à gauche) sont déplacés d'un pas de la maille cristalline, créant localement une densité d'atomes plus élevée (la dislocation).



Le modèle de Frenkel-Kontorova permet une modélisation simple d'une dislocation coin. Il décrit une chaîne de particules classiques avec des interactions entre voisins les plus proches (la couche atomique qui peut se déformer pour créer la dislocation) et soumis à un potentiel de substrat périodique (la couche atomique non-déformée en dessous). Le modèle est illustré dans le schéma suivant :



La masse des particules de la chaîne est dénotée  $m$ . Le potentiel périodique est donné par

$$V_{\text{FK}}(x) = V_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (1)$$

1.  $\rightarrow$  Déterminer les minima  $\bar{x}_n$  du potentiel Eq. (1), où  $\bar{x}_{n_1} < \bar{x}_{n_2}$ , si  $n_1 < n_2$ , et  $\bar{x}_0$  est le minimum le plus proche de l'origine,  $x = 0$ .
2.  $\rightarrow$  Dénoter  $u_n$  la distance de la  $n$ -ième particule de la chaîne du minimum  $\bar{x}_n$ . Donner l'énergie cinétique et potentielle de la chaîne en fonction des  $u_n$  et des quantités de mouvement associées. (Simplifier, si possible.)
3.  $\rightarrow$  En outre, il y a des interactions entre les voisins les plus proches. On suppose que ces interactions dépendent seulement de la distance entre les voisins. Donner la forme générale de l'énergie d'interaction,  $U_{n,n+1}$ .
4. Par la suite, on suppose que l'énergie d'interaction est minimale quand la distance entre les voisins est égale à  $\Delta x = a$ . Justifier que l'énergie d'interaction  $U_{n,n+1}$  à l'ordre le plus bas dans les déviations de cette distance peut être approximée par

$$U_{n,n+1} = U_0 + \frac{C}{2}(u_{n+1} - u_n)^2.$$

et donner le signe de  $C$ .

5.  $\rightarrow$  En combinant les résultats précédents, on trouve l'Hamiltonien du système sous la forme suivante :

$$H = \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m} + \frac{C}{2}(u_{n+1} - u_n)^2 + V_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi u_n}{a} \right) \right\}. \quad (2)$$

Déterminer les équations du mouvement Hamiltoniennes et combiner les pour trouver les équations de Newton pour ce système.

6. Montrer que dans la limite continue, on obtient l'équation suivante pour le champ  $u(x, t)$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \beta \sin \frac{2\pi u}{a}. \quad (3)$$

Donner les expressions pour les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

7. → Donner les solutions de l'équation (3) pour  $\beta = 0$ .  
 8. → Par la suite, on cherche des solutions de l'équation (3) sous la forme  $u(x, t) = g(x - wt)$ . Montrer que la fonction  $g(z)$  obéit à l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dz^2}g(z) = \gamma \sin \frac{2\pi g}{a} \quad (4)$$

et déterminer  $\gamma$ .

9. → L'équation (4) peut être interprétée comme l'équations de mouvement d'une particule fictive. Identifier la position fictive, le temps fictif, la masse fictive  $m$  ainsi que le potentiel fictif  $U$ .  
 10. Tracer le potentiel fictif est indiquer la trajectoire correspondant à un soliton. Décrire cette trajectoire et justifier pourquoi il s'agit d'une solution physique.  
 11. Déterminer l'équation correspondant à la conservation de l'énergie de la particule fictive.  
 12. Montrer que pour obtenir une solution du type soliton (voir question 10), l'équation correspondant à la conservation de l'énergie de la particule fictive (voir question 11) prend la forme

$$\left(\frac{dg}{dz}\right)^2 = \frac{2\gamma a}{\pi} \sin^2 \frac{\pi g}{a}. \quad (5)$$

13. → Utiliser la substitution  $x = \tan(\pi g/2a)$ , pour démontrer que les solutions de l'équation (5) sont données par

$$g(z) = \frac{2a}{\pi} \arctan \left\{ \exp \left[ \pm \sqrt{2\pi\gamma/a} (z - z_0) \right] \right\}. \quad (6)$$

14. → Tracer  $u(x, t_0)$  correspondant à la solution Eq. (6) (donner bien toutes les échelles) et discuter l'évolution de la courbe en fonction du temps.  
 15. → Est-ce que les dislocations dans un cristal se comportent comme des solitons ? Discuter les limitations de la modélisation utilisée ici.

### 3 Supraconductivité multi-gap ( $\sim 35\% = 26$ points)

En cours, nous avons vu la fonctionnelle de Ginzburg-Landau pour un supraconducteur avec un paramètre d'ordre,  $\psi(\vec{r})$ . Dans des matériaux avec plusieurs bandes, une supraconductivité caractérisée par plusieurs paramètres d'ordres couplés peut exister. C'est le cas, par exemple, pour  $\text{MgB}_2$ .

Ici nous allons considérer un supraconducteur avec deux paramètres d'ordre complexes couplés,  $\psi_1(\vec{r})$  et  $\psi_2(\vec{r})$ . Dans ce cas, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} F_{\text{GL}}[\psi_1, \psi_2, \vec{A}] = & F_N + \int_V (dr) \left\{ \sum_{i=1,2} \left[ \alpha_i(T) |\psi_i(\vec{r})|^2 + \frac{\beta_i}{2} |\psi_i(\vec{r})|^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4m_i} \left| \left( -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right) \psi_i(\vec{r}) \right|^2 \right] \right. \\ & \left. - \gamma (\psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) + \psi_2^*(\vec{r}) \psi_1(\vec{r})) + \frac{\hbar^2(\vec{r})}{8\pi} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ici  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur,  $\vec{h}$  le champ magnétique et  $m_i$  sont des masses effectives. Nous supposons  $\gamma > 0$ .

1. → Donner la relation entre  $\vec{A}$  et  $\vec{h}$ .
2. → Donner les signes de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Justifier votre réponse.
3. → Dans un premier temps, nous allons chercher une solution homogène,  $\psi_i = cste$ , en absence de champ magnétique. Obtenir une expression simplifiée  $F_{GL}^{(0)}$  de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, Eq. (7), pour ce cas.
4. Utiliser  $F_{GL}^{(0)}$  pour argumenter pourquoi les deux paramètres d'ordre auront la même phase,  $\psi_i = |\psi_i|e^{i\varphi}$ .
5. En posant  $\psi_i = |\psi_i|e^{i\varphi}$ , montrer que les équations qui donnent les extrema de  $F_{GL}^{(0)}[\psi_1, \psi_2]$  en fonction des deux paramètres,  $|\psi_1|$  et  $|\psi_2|$ , sont données par

$$0 = \alpha_1(T)|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 - \gamma|\psi_2|, \quad (8a)$$

$$0 = \alpha_2(T)|\psi_2| + \beta_2|\psi_2|^3 - \gamma|\psi_1|. \quad (8b)$$

6. → Sous quelles conditions la solution  $|\psi_1| = |\psi_2| = 0$  correspond à un minimum de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau ? [Il suffit de garder les termes linéaires en  $|\psi_i|$  dans les équations (8). (Pourquoi ?)]
7. → Si  $\gamma = 0$ , les deux équations (8) sont découplées. Décrire le comportement du système dans ce cas. (Quelle est la valeur des paramètres d'ordre ? Est-ce qu'il y a des transitions de phase ? De quel ordre ? ...)
8. Par la suite, nous prenons  $\alpha_1(T) = a_1(T - T_1)$  et  $\alpha_2(T) = a_2(T - T_2)$  avec  $a_i > 0$  et  $T_1 \gg T_2$ . En outre, nous supposons que le couplage entre les deux paramètres d'ordre est faible, c'est-à-dire,  $\gamma$  est petit. Montrer que la température critique peut être approximée par

$$T_c \approx T_1 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2 T_1}.$$

Commenter.

9. En dessous de la température critique, on pourra écrire  $r = |\psi_2|/|\psi_1|$ . Justifier que  $r \ll 1$  proche de la température critique en utilisant les paramètres tels que spécifiés dans la question 8. Déterminer  $r$  sous ces hypothèses et discuter sa dépendance en température.
10. → Nous retournons à la fonctionnelle de Ginzburg-Landau complète, Eq. (7). Montrer que les 3 équations de Ginzburg-Landau sont données par :

$$0 = \alpha_1\psi_1 + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1 + \frac{1}{4m_1} \left( i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 - \gamma\psi_2, \quad (9a)$$

$$0 = \alpha_2\psi_2 + \beta_2|\psi_2|^2\psi_2 + \frac{1}{4m_2} \left( i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_2 - \gamma\psi_1, \quad (9b)$$

$$0 = -\frac{1}{c} \sum_{i=1,2} \left[ \frac{i\hbar e}{2m_i} \left( (\vec{\nabla}\psi_i^*)\psi_i - \psi_i^*(\vec{\nabla}\psi_i) \right) - \frac{2e^2}{m_i c} \vec{A}|\psi_i|^2 \right] + \frac{1}{4\pi} \text{rot}(\vec{h}). \quad (9c)$$

Détailler et justifier les étapes de calcul.

11. → Montrer que le courant est donné par

$$\vec{j} = \sum_{i=1,2} \frac{e}{m_i} |\psi_i|^2 \left( \hbar\vec{\nabla}\varphi_i - \frac{2e}{c}\vec{A} \right).$$