

DM (CC)

“Théorie des champs classiques” 2019/2020

à rendre par email à julia.meyer@univ-grenoble-alpes.fr
avant le 16 mai 2020 à 18h

— **Le DM est un travail individuel !**

Il est obligatoire de recopier l’engagement d’intégrité intellectuelle suivant sur votre copie et de le signer :

Je soussigné·e, (nom et prénom), m’engage à effectuer seul·e mon évaluation, selon les modalités diffusées par l’enseignant. Je suis conscient·e que toute ressemblance avec une autre composition peut être suspectée de plagiat.

- Si possible, rendez votre travail dans un seul fichier pdf.
 - La copie n’est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.
 - Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question suivante. Les questions auxquelles on peut répondre sans connaître les réponses précédentes sont marquées par une flèche (\rightarrow).
-

Le DM a été noté sur 71 points.

1 Questions courtes ($\sim 15\% = 10$ points)

Les réponses aux questions courtes ne nécessitent pas des calculs longs. Quelques phrases suffisent - la moitié d’une page au maximum ! Vous pouvez ajouter des dessins pour illustrer vos réponses.

1. \rightarrow On considère une densité Lagrangienne de la forme

$$\mathcal{L}(q_t(\vec{r}, t), q_x(\vec{r}, t), q_y(\vec{r}, t), q_{xxx}(\vec{r}, t)),$$

où $q(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire. Donner l’équation d’Euler-Lagrange. Ecrire seulement les termes qui peuvent être non-nuls.

Solution: (3 points) En ne gardant que les termes non-nuls, on obtient

$$0 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_t} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial q_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial L}{\partial q_y} + \frac{d^4}{dx^4} \frac{\partial L}{\partial q_{xxx}}.$$

2. → Justifier la forme du Lagrangien relativiste (dépendance des variables, préfacteur) d'une particule libre

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Solution: (4 points) Comme l'espace est homogène et isotrope et le temps est uniforme, le Lagrangien peut dépendre de v^2 seulement. En outre, l'action $dS = L dt$ doit être invariant sous transformations de Lorentz. Donc $dS = \alpha ds = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$ ou $L = \alpha ds = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Le préfacteur est choisi tel qu'on retrouve le résultat non-relativiste pour $v \ll c$.

3. → Quels sont les invariants quadratiques du champ électromagnétique ? Expliquer pourquoi seulement une des deux apparaît dans l'action du champ électromagnétique.

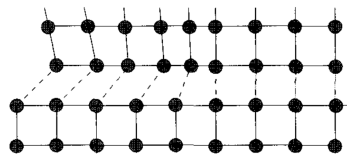
Solution: (3 points) Pour obtenir les invariants, il faut construire des quadri-scalaires à partir du tenseur électromagnétique. Il y a deux possibilités :

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad \text{et} \quad \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}.$$

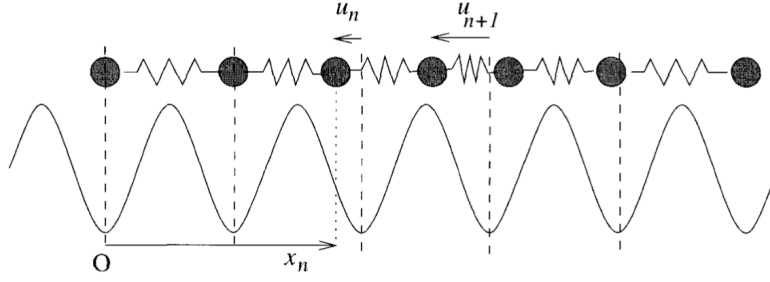
Seulement $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ apparaît dans l'action parce que $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}$ est une dérivée totale qui n'a pas d'impact sur les équations du mouvement. En outre, il s'agit d'un pseudo-scalaire.

2 Dislocations dans des cristaux ($\sim 50\% = 36$ points)

En science des matériaux, une dislocation est un défaut linéaire correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Le schéma ci-dessous montre une dislocation "coin". On y voit la déformation d'une couche atomique par rapport à la couche en dessous : les atomes d'un côté de la dislocation (à gauche) sont déplacés d'un pas de la maille cristalline, créant localement une densité d'atomes plus élevée (la dislocation).



Le modèle de Frenkel-Kontorova permet une modélisation simple d'une dislocation coin. Il décrit une chaîne de particules classiques avec des interactions entre voisins les plus proches (la couche atomique qui peut se déformer pour créer la dislocation) et soumis à un potentiel de substrat périodique (la couche atomique non-déformée en dessous). Le modèle est illustré dans le schéma suivant :



La masse des particules de la chaîne est dénotée m . Le potentiel périodique est donné par

$$V_{\text{FK}}(x) = V_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (1)$$

- Déterminer les minima \bar{x}_n du potentiel Eq. (1), où $\bar{x}_{n_1} < \bar{x}_{n_2}$, si $n_1 < n_2$, et \bar{x}_0 est le minimum le plus proche de l'origine, $x = 0$.

Solution: (1 point) Les minima sont à $\cos \frac{2\pi x}{a} = 1$. Donc $\frac{2\pi x}{a} = 2\pi n$ ou $x = na$. On définit $\bar{x}_n = na$.

- Dénoter u_n la distance de la n -ième particule de la chaîne du minimum \bar{x}_n . Donner l'énergie cinétique et potentielle de la chaîne en fonction des u_n et des quantités de mouvement associées. (Simplifier, si possible.)

Solution: (3 points) L'énergie cinétique est donnée par

$$K = \sum_n \frac{p_n^2}{2m}.$$

L'énergie potentielle est donnée par

$$\begin{aligned} V &= \sum_n V_{\text{FK}}(x_n) = \sum_n V_{\text{FK}}(\bar{x}_n + u_n) = \sum_n V_{\text{FK}}(na + u_n) \\ &= \sum_n V_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi(na + u_n)}{a} \right) = \sum_n V_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi u_n}{a} \right). \end{aligned}$$

- En outre, il y a des interactions entre les voisins les plus proches. On suppose que ces interactions dépendent seulement de la distance entre les voisins. Donner la forme générale de l'énergie d'interaction, $U_{n,n+1}$.

Solution: (1 point) La distance entre les voisins n et $n+1$ est donnée par $d_{n,n+1} = |x_{n+1} - x_n|$. Donc

$$U_{n,n+1} = U(x_n, x_{n+1}) = U(x_{n+1} - x_n),$$

où $U(x)$ est une fonction paire arbitraire.

- Par la suite, on suppose que l'énergie d'interaction est minimale quand la distance entre les voisins est égale à $\Delta x = a$. Justifier que l'énergie d'interaction $U_{n,n+1}$ à l'ordre le plus bas dans les déviations de cette distance peut être approximée par

$$U_{n,n+1} = U_0 + \frac{C}{2}(u_{n+1} - u_n)^2.$$

et donner le signe de C .

Solution: (2 points) En supposant que les déviations sont petites, on peut écrire

$$\begin{aligned} U_{n,n+1}(x_n, x_{n+1}) &= U(a + u_{n+1} - u_n) \\ &\approx U(a) + U'(a)(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}U''(a)(u_{n+1} - u_n)^2. \end{aligned}$$

Parce que $U(x)$ possède un minimum en $x = a$, on a $U'(a) = 0$ et $C = U''(a) > 0$.

5. → En combinant les résultats précédents, on trouve l'Hamiltonien du système sous la forme suivante :

$$H = \sum_n \left\{ \frac{p_n^2}{2m} + \frac{C}{2}(u_{n+1} - u_n)^2 + V_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi u_n}{a} \right) \right\}. \quad (2)$$

Déterminer les équations du mouvement Hamiltoniennes et combiner les pour trouver les équations de Newton pour ce système.

Solution: (4 points) Les équations de Hamilton-Jacobi sont données par

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{p_n}{m} \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial u_n} = - \left[-C(u_{n+1} - u_n) + C(u_n - u_{n-1}) + \frac{2\pi}{a} V_0 \sin \frac{2\pi u_n}{a} \right]. \end{aligned}$$

En combinant les deux équations, on obtient

$$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - \frac{2\pi}{a} V_0 \sin \frac{2\pi u_n}{a}.$$

6. Montrer que dans la limite continue, on obtient l'équation suivante pour le champ $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \beta \sin \frac{2\pi u}{a}. \quad (3)$$

Donner les expressions pour les coefficients α et β .

Solution: (4 points) Avec

$$u_n = u(x_n) = u(na) = u(x)$$

et

$$u_{n\pm 1} = u(x_{n\pm 1}) = u((n\pm 1)a) \approx u(na) \pm u'(na)a + \frac{1}{2}u''(na)a^2 = u(x) \pm u'(x)a + \frac{1}{2}u''(x)a^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} m\ddot{u} &= C(u + u'a + \frac{1}{2}u''a^2 + u - u'a + \frac{1}{2}u''a^2 - 2u) - \frac{2\pi}{a} V_0 \cos \frac{2\pi u}{a} \\ &= Ca^2 u'' - \frac{2\pi}{a} V_0 \sin \frac{2\pi u}{a}. \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{Ca^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{2\pi V_0}{ma} \sin \frac{2\pi u}{a}.$$

Donc $\alpha = Ca^2/m$ et $\beta = 2\pi V_0/ma$.

7. → Donner les solutions de l'équation (3) pour $\beta = 0$.

Solution: (3 points) A $\beta = 0$, on obtient une équation d'onde,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

Donc, les solutions sont des ondes planes,

$$u_q(x, t) = Ae^{i(qx - \omega_q t)} + Be^{i(qx + \omega_q t)},$$

avec $\omega_q = \sqrt{\alpha}|q|$.

8. → Par la suite, on cherche des solutions de l'équation (3) sous la forme $u(x, t) = g(x - wt)$. Montrer que la fonction $g(z)$ obéit à l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dz^2}g(z) = \gamma \sin \frac{2\pi g}{a} \quad (4)$$

et déterminer γ .

Solution: (2 points) Avec

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = w^2 g''(x - wt), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = g''(x - wt),$$

on obtient

$$w^2 g'' = \alpha g'' - \beta \sin \frac{2\pi g}{a}$$

ou

$$\frac{d^2}{dz^2}g(z) = \frac{\beta}{\alpha - w^2} \sin \frac{2\pi g}{a}.$$

Donc $\gamma = \beta/(\alpha - w^2)$.

9. → L'équation (4) peut être interprétée comme l'équations de mouvement d'une particule fictive. Identifier la position fictive, le temps fictif, la masse fictive m ainsi que le potentiel fictif U .

Solution: (3 points)

- position fictive : g
- temps fictif : z
- masse fictive : 1
- potentiel fictif :

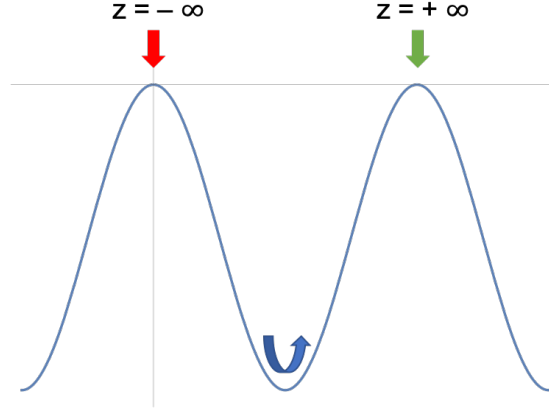
$$-\frac{d}{dg}U = \gamma \sin \frac{2\pi g}{a}$$

Donc

$$U(g) = \frac{\gamma a}{2\pi} \cos \frac{2\pi g}{a} + cste.$$

10. Tracer le potentiel fictif et indiquer la trajectoire correspondant à un soliton. Décrire cette trajectoire et justifier pourquoi il s'agit d'une solution physique.

Solution: (3 points)



Un soliton correspond à une trajectoire qui passe d'un maximum à $z = -\infty$ à un maximum voisin à $z = \infty$. Pour obtenir une solution physique, il faut que $|g| < \infty$ pour tous z , ce qui est le cas ici.

11. Déterminer l'équation correspondant à la conservation de l'énergie de la particule fictive.

Solution: (3 points) L'équation de mouvement de la particule fictive ne contient que des forces conservatives. Donc l'énergie totale qui est une somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est conservée :

$$E_{\text{fictive}} = \frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 + U(g) = \frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 + \frac{\gamma a}{2\pi} \cos \frac{2\pi g}{a} + \text{cste.}$$

12. Montrer que pour obtenir une solution du type soliton (voir question 10), l'équation correspondant à la conservation de l'énergie de la particule fictive (voir question 11) prend la forme

$$\left(\frac{dg}{dz} \right)^2 = \frac{2\gamma a}{\pi} \sin^2 \frac{\pi g}{a}. \quad (5)$$

Solution: (3 points) Selon la question 11, on a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 = \text{cste} - \frac{\gamma a}{2\pi} \cos \frac{2\pi g}{a}.$$

Pour une solution de type soliton, on a $dg/dz = 0$ et $g = na$ pour $z \rightarrow \pm\infty$. Donc

$$\left(\frac{dg}{dz} \right)^2 = \frac{\gamma a}{\pi} (1 - \cos \frac{2\pi g}{a}) = \frac{2\gamma a}{\pi} \sin^2 \frac{\pi g}{a}.$$

13. → Utiliser la substitution $x = \tan(\pi g/2a)$, pour démontrer que les solutions de l'équation (5) sont données par

$$g(z) = \frac{2a}{\pi} \arctan \left\{ \exp \left[\pm \sqrt{2\pi\gamma/a} (z - z_0) \right] \right\}. \quad (6)$$

Solution: (3 points) En séparant les variables, Eq. (5) donne

$$\int \frac{dg}{\sin \frac{\pi g}{a}} = \pm \sqrt{\frac{2\gamma a}{\pi}} \int dz.$$

En outre,

$$dx = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi g}{2a}} dg.$$

Donc

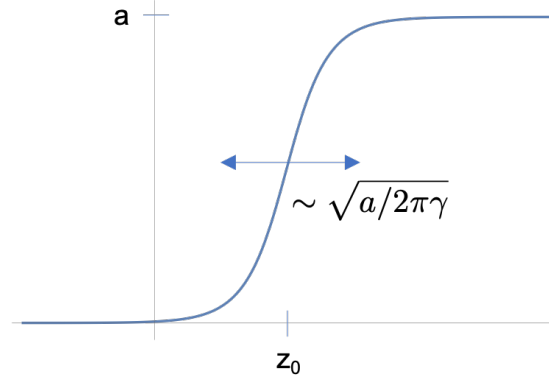
$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{2\gamma a}{\pi}} (z - z_0) &= \frac{2a}{\pi} \int dx \frac{\cos^2 \frac{\pi g}{2a}}{2 \sin \frac{\pi g}{2a} \cos \frac{\pi g}{2a}} = \frac{a}{\pi} \int dx \frac{\cos \frac{\pi g}{2a}}{\sin \frac{\pi g}{2a}} \\ &= \frac{a}{\pi} \int \frac{dx}{x} = \frac{a}{\pi} \ln x = \frac{a}{\pi} \ln \left(\tan \frac{\pi g(z)}{2a} \right) \end{aligned}$$

ou

$$g(z) = \frac{2a}{\pi} \arctan \{ \exp[\pm \sqrt{2\pi\gamma/a} (z - z_0)] \}.$$

14. → Tracer $u(x, t_0)$ correspondant à la solution Eq. (6) (donner bien toutes les échelles) et discuter l'évolution de la courbe en fonction du temps.

Solution: (2 points) Pour le signe +, on obtient la courbe suivante :



En fonction du temps, la courbe se déplace sans déformation avec vitesse w .

15. → Est-ce que les dislocations dans un cristal se comportent comme des solitons? Discuter les limitations de la modélisation utilisée ici.

Solution: (1 point) Si les dislocations étaient des solitons, elles se déplaceraient sans déformation. Ce n'est pas ce qu'on observe dans des vrais matériaux. Le modèle utilisé ici est simplifié, mais surtout son traitement en limite continu n'est pas justifié en général : typiquement les dislocations sont assez étroites par rapport au pas du réseau a (comme montré dans le schéma en début de l'exo).

3 Supraconductivité multi-gap ($\sim 35\% = 26$ points)

En cours, nous avons vu la fonctionnelle de Ginzburg-Landau pour un supraconducteur avec un paramètre d'ordre, $\psi(\vec{r})$. Dans des matériaux avec plusieurs bandes, une supraconductivité caractérisée par plusieurs paramètres d'ordres couplés peut exister. C'est le cas, par exemple, pour MgB_2 .

Ici nous allons considérer un supraconducteur avec deux paramètres d'ordre complexes couplés, $\psi_1(\vec{r})$ et $\psi_2(\vec{r})$. Dans ce cas, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau prend la forme suivante :

$$F_{\text{GL}}[\psi_1, \psi_2, \vec{A}] = F_N + \int_V (dr) \left\{ \sum_{i=1,2} \left[\alpha_i(T) |\psi_i(\vec{r})|^2 + \frac{\beta_i}{2} |\psi_i(\vec{r})|^4 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4m_i} \left| \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right) \psi_i(\vec{r}) \right|^2 \right] \right. \\ \left. - \gamma (\psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) + \psi_2^*(\vec{r}) \psi_1(\vec{r})) + \frac{\hbar^2(\vec{r})}{8\pi} \right\}. \quad (7)$$

Ici \vec{A} est le potentiel vecteur, \vec{h} le champ magnétique et m_i sont des masses effectives. Nous supposons $\gamma > 0$.

1. \rightarrow Donner la relation entre \vec{A} et \vec{h} .

Solution: (1 point) La relation entre le potentiel vecteur et le champ magnétique est donnée par

$$\vec{h} = \text{rot} \vec{A}.$$

2. \rightarrow Donner les signes de β_1 et β_2 . Justifier votre réponse.

Solution: (1 point) $\beta_i \geq 0$, sinon la fonctionnelle ne possède pas de minimum pour $|\psi_i| < \infty$.

3. \rightarrow Dans un premier temps, nous allons chercher une solution homogène, $\psi_i = \text{cste}$, en absence de champ magnétique. Obtenir une expression simplifiée $F_{\text{GL}}^{(0)}$ de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, Eq. (7), pour ce cas.

Solution: (2 points) En absence de champ magnétique $\vec{h} = \vec{A} = 0$. En outre, $\int_V (dr) \text{ cste} = V \times \text{cste}$. Donc

$$F_{\text{GL}}^{(0)}[\psi_1, \psi_2] = V \left\{ \alpha_1(T) |\psi_1|^2 + \alpha_2(T) |\psi_2|^2 + \frac{\beta_1}{2} |\psi_1|^4 + \frac{\beta_2}{2} |\psi_2|^4 - \gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) \right\}.$$

4. Utiliser $F_{\text{GL}}^{(0)}$ pour argumenter pourquoi les deux paramètres d'ordre auront la même phase, $\psi_i = |\psi_i| e^{i\varphi}$.

Solution: (2 points) En substituant $\psi_i = |\psi_i|e^{i\varphi_i}$ dans l'expression obtenue dans la questions précédente, on trouve

$$F_{\text{GL}}^{(0)}[\psi_1, \psi_2] = V \left\{ \alpha_1(T)|\psi_1|^2 + \alpha_2(T)|\psi_2|^2 + \frac{\beta_1}{2}|\psi_1|^4 + \frac{\beta_2}{2}|\psi_2|^4 - 2\gamma \cos(\varphi_1 - \varphi_2)|\psi_1||\psi_2| \right\}.$$

Parce que $\gamma > 0$, un minimum nécessite $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ ou $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi n$.

5. En posant $\psi_i = |\psi_i|e^{i\varphi_i}$, montrer que les équations qui donnent les extrema de $F_{\text{GL}}^{(0)}[\psi_1, \psi_2]$ en fonction des deux paramètres, $|\psi_1|$ et $|\psi_2|$, sont données par

$$0 = \alpha_1(T)|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 - \gamma|\psi_2|, \quad (8a)$$

$$0 = \alpha_2(T)|\psi_2| + \beta_2|\psi_2|^3 - \gamma|\psi_1|. \quad (8b)$$

Solution: (3 points) $F_{\text{GL}}^{(0)}$ dépend de deux paramètres réels, $|\psi_1|$ et $|\psi_2|$:

$$F_{\text{GL}}^{(0)}[|\psi_1|, |\psi_2|] = V \left\{ \alpha_1(T)|\psi_1|^2 + \alpha_2(T)|\psi_2|^2 + \frac{\beta_1}{2}|\psi_1|^4 + \frac{\beta_2}{2}|\psi_2|^4 - 2\gamma|\psi_1||\psi_2| \right\}.$$

Pour obtenir un extremum, il faut que les dérivées partielles par rapport à ces deux paramètres soient nulles :

$$0 = \frac{\partial}{\partial |\psi_1|} F_{\text{GL}}^{(0)}[|\psi_1|, |\psi_2|] = 2V (\alpha_1(T)|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 - \gamma|\psi_2|),$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial |\psi_2|} F_{\text{GL}}^{(0)}[|\psi_1|, |\psi_2|] = 2V (\alpha_2(T)|\psi_2| + \beta_2|\psi_2|^3 - \gamma|\psi_1|).$$

6. → Sous quelles conditions la solution $|\psi_1| = |\psi_2| = 0$ correspond à un minimum de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau ? [Il suffit de garder les termes linéaires en $|\psi_i|$ dans les équations (8). (Pourquoi ?)]

Solution: (3 points) Pour un paramètre d'ordre, il y a une transition de phase si le coefficient du terme quadratique dans la fonctionnelle de Ginzburg-Landau change de signe. Pour étudier cela, il suffit de garder les termes linéaires dans l'équation de Ginzburg-Landau. Ici on obtient

$$0 = \alpha_1(T)|\psi_1| - \gamma|\psi_2|,$$

$$0 = \alpha_2(T)|\psi_2| - \gamma|\psi_1|.$$

Les deux équations couplées peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$0 = \begin{pmatrix} \alpha_1(T) & -\gamma \\ -\gamma & \alpha_2(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

$|\psi_1| = |\psi_2| = 0$ correspond à un minimum tant que les deux valeurs propres de la matrice sont positives. La transition de phase a lieu quand une des valeurs propres change de signe et $\text{Det } \mathbf{M} = 0$.

7. → Si $\gamma = 0$, les deux équations (8) sont découplées. Décrire le comportement du système dans ce cas. (Quelle est la valeur des paramètres d'ordre ? Est-ce qu'il y a des transitions de phase ? De quel ordre ? ...)

Solution: (3 points) Pour $\gamma = 0$, on retrouve l'équation qu'on a étudiée en cours pour chacun des paramètres d'ordre :

$$0 = (\alpha_i(T) + \beta_i|\psi_i|^2) \psi_i.$$

La solution $\psi_i = 0$ existe toujours. En outre, il y a une deuxième solution, $|\psi_i| = \sqrt{-\alpha_i(T)/\beta_i}$, pour $\alpha_i(T) < 0$. Si $\alpha_i(T)$ change de signe à une température T_i , il y a donc une transition de phase à cette température T_i . Comme $|\psi_i|$ varie continûment à travers la transition, il s'agit d'une transition du 2nd ordre.

8. Par la suite, nous prenons $\alpha_1(T) = a_1(T - T_1)$ et $\alpha_2(T) = a_2(T - T_2)$ avec $a_i > 0$ et $T_1 \gg T_2$. En outre, nous supposons que le couplage entre les deux paramètres d'ordre est faible, c'est-à-dire, γ est petit. Montrer que la température critique peut être approximée par

$$T_c \approx T_1 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2 T_1}.$$

Commenter.

Solution: (2 points) La condition $\text{Det } \mathbf{M} = 0$ (voir question 6) nous donne

$$0 = a_1(T - T_1)a_2(T - T_2) - \gamma^2$$

On trouve deux solutions de cette équation quadratique :

$$T_{\pm} = \frac{T_1 + T_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 - T_1 T_2 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2}}.$$

Selon les considérations de la question 6, il y aura donc une transition de phase à une température $T = T_+$.

Pour $T_1 \gg T_2$ et $\gamma \ll \sqrt{a_1 a_2} T_1/2$, on peut approximer

$$T_+ \approx \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2}} \approx T_1 + \frac{\gamma^2}{a_1 a_2 T_1}.$$

9. En dessous de la température critique, on pourra écrire $r = |\psi_2|/|\psi_1|$. Justifier que $r \ll 1$ proche de la température critique en utilisant les paramètres tels que spécifiés dans la question 8. Déterminer r sous ces hypothèses et discuter sa dépendance en température.

Solution: (2 points) Sans couplage, $T_1 \gg T_2$. On s'attend donc que le paramètre d'ordre $|\psi_1|$ domine.

Le point de départ sont les équations (8) :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 - \gamma|\psi_2| = [\alpha_1 + \beta_1|\psi_1|^2 - r\gamma] |\psi_1|, \\ 0 &= \alpha_2|\psi_2| + \beta_2|\psi_2|^3 - \gamma|\psi_1| = [r\alpha_2 + r^3\beta_2|\psi_1|^2 - \gamma] |\psi_1|. \end{aligned}$$

Proche de la température critique, $|\psi_1|^2$ est petit. On peut donc négliger le terme $r^3\beta_2|\psi_1|^2$ dans la 2^{ème} équation pour trouver $r = \gamma/\alpha_2$. Comme α_2 diminue avec la température, r augmente.

10. → Nous retournons à la fonctionnelle de Ginzburg-Landau complète, Eq. (7). Montrer que les 3 équations de Ginzburg-Landau sont données par :

$$0 = \alpha_1\psi_1 + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1 + \frac{1}{4m_1} \left(i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 - \gamma\psi_2, \quad (9a)$$

$$0 = \alpha_2\psi_2 + \beta_2|\psi_2|^2\psi_2 + \frac{1}{4m_2} \left(i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_2 - \gamma\psi_1, \quad (9b)$$

$$0 = -\frac{1}{c} \sum_{i=1,2} \left[\frac{i\hbar e}{2m_i} \left((\vec{\nabla}\psi_i^*)\psi_i - \psi_i^*(\vec{\nabla}\psi_i) \right) - \frac{2e^2}{m_i c} \vec{A}|\psi_i|^2 \right] + \frac{1}{4\pi} \text{rot}(\vec{h}). \quad (9c)$$

Détailler et justifier les étapes de calcul.

Solution: (6 points) Pour obtenir les 3 équations de Ginzburg-Landau, il faut varier ψ_1^* , ψ_2^* et \vec{A} . Variation par rapport à ψ_1^* :

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{GL}} = \int (dr) & \left\{ \alpha_1\psi_1\delta\psi_1^* + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1\delta\psi_1^* \right. \\ & \left. + \frac{1}{4m_1} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_1 \left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \delta\psi_1^* - \gamma\delta\psi_1^*\psi_2 \right\}. \end{aligned}$$

Avec une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{GL}} &= \int (dr) \left\{ \alpha_1\psi_1\delta\psi_1^* + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1\delta\psi_1^* + \frac{1}{4m_1} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1\delta\psi_1^* - \gamma\delta\psi_1^*\psi_2 \right\} \\ &= \int (dr) \left\{ \alpha_1\psi_1 + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1 + \frac{1}{4m_1} \left(i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 - \gamma\psi_2 \right\} \delta\psi_1^* \end{aligned}$$

ou

$$0 = \alpha_1\psi_1 + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1 + \frac{1}{4m_1} \left(i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 - \gamma\psi_2.$$

Variation par rapport à ψ_2^* : Le même calcul que celui qu'on a fait pour ψ_1^* mène à

$$0 = \alpha_2\psi_2 + \beta_2|\psi_2|^2\psi_2 + \frac{1}{4m_2} \left(i\hbar\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_2 - \gamma\psi_1.$$

Variation par rapport à \vec{A} :

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{GL}} &= \int (dr) \left\{ - \sum_i \frac{e}{2m_i c} \delta\vec{A} \left[\psi_i \left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_i^* + \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_i \psi_i^* \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hbar}{4\pi} \text{rot}(\delta\vec{A}) \right\}. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme, il faut effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
 \int (dr) \vec{h} \cdot \text{rot}(\delta \vec{A}) &= \int (dr) h_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta A_k \\
 &= -\epsilon_{ijk} \int (dr) \frac{\partial}{\partial x_j} h_i \delta A_k = \epsilon_{kji} \int (dr) \delta A_k \frac{\partial}{\partial x_j} h_i \\
 &= \int (dr) \delta \vec{A} \cdot \text{rot}(\vec{h}).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\delta F_{\text{GL}} = \int (dr) \left\{ \sum_i \left[-\frac{i\hbar e}{2m_i c} \left((\vec{\nabla} \psi_i^*) \psi_i - \psi_i^* (\vec{\nabla} \psi_i) \right) + \frac{2e^2}{m_i c^2} \vec{A} |\psi_i|^2 \right] + \frac{1}{4\pi} \text{rot}(\vec{h}) \right\} \delta \vec{A}$$

ou

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{i\hbar e}{2m_1 c} \left((\vec{\nabla} \psi_1^*) \psi_1 - \psi_1^* (\vec{\nabla} \psi_1) \right) - \frac{i\hbar e}{2m_2 c} \left((\vec{\nabla} \psi_2^*) \psi_2 - \psi_2^* (\vec{\nabla} \psi_2) \right) \\
 &\quad + \frac{2e^2}{c^2} \vec{A} \left(\frac{1}{m_1} |\psi_1|^2 + \frac{1}{m_2} |\psi_2|^2 \right) + \frac{1}{4\pi} \text{rot}(\vec{h}).
 \end{aligned}$$

11. → Montrer que le courant est donné par

$$\vec{j} = \sum_{i=1,2} \frac{e}{m_i} |\psi_i|^2 \left(\hbar \vec{\nabla} \varphi_i - \frac{2e}{c} \vec{A} \right).$$

Solution: (1 point) Avec $\text{rot}(\vec{h}) = (4\pi/c) \vec{j}$ (Maxwell), on obtient

$$\vec{j} = \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{i\hbar e}{2m_i} \left((\vec{\nabla} \psi_i^*) \psi_i - \psi_i^* (\vec{\nabla} \psi_i) \right) - \frac{2e^2}{m_i c} \vec{A} |\psi_i|^2 \right\}$$

à partir de la 3^{ème} équation de Ginzburg-Landau. En outre,

$$\begin{aligned}
 &\vec{\nabla}(|\psi_i| e^{-i\varphi_i}) |\psi_i| e^{i\varphi_i} - |\psi_i| e^{-i\varphi_i} \vec{\nabla}(|\psi_i| e^{-i\varphi_i}) \\
 &= (\vec{\nabla} |\psi_i| e^{-i\varphi_i} + |\psi_i| (-i \vec{\nabla} \varphi_i) e^{-i\varphi_i}) |\psi_i| e^{i\varphi_i} - |\psi_i| e^{-i\varphi_i} (\vec{\nabla} |\psi_i| e^{i\varphi_i} + |\psi_i| (i \vec{\nabla} \varphi_i) e^{i\varphi_i}) \\
 &= -2i \vec{\nabla} \varphi_i |\psi_i|^2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{j} = \sum_{i=1,2} \frac{e}{m_i} |\psi_i|^2 \left(\hbar \vec{\nabla} \varphi_i - \frac{2e}{c} \vec{A} \right).$$