Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 9 – Analyse Complexe I

Exercice 1

Donner la partie imaginaire des fonctions suivantes : (i) $f_1(z) = e^{ix}$, (ii) $f_2(z) = z^*z$ et (iii) $f_3(z) = 1/z$ avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann qui définissent un fonction analytique. Les fonctions suivantes sont-elles analytiques ?

1 - $f_1(z) = \overline{z}$;
2 - $f_2(z) = z\overline{z}$;
3 - $f_3(z) = \sin(z)$;
4 - $f_4(z) = \ln|z| + i\arg(z)$.

Exercice 3

1 - Trouver les parties réelles et imaginaires de $f(z) = 1/(1 - z)$.

2 - Montrer que $f(z)$ est analytique.

3 - Calculer la dérivée de $f(z)$ en utilisant la définition

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

4 - Comparer le résultat ainsi obtenu avec la dérivée de $f(x)$ lorsque x est réel.

Exercice 4

1 - Montrer que la fonction $X(x, y) = x^2 - y^2$ est harmonique, c'est-à-dire que $\Delta X = 0$.

2 - Trouver les fonctions à valeurs réelles $Y(x, y)$ telles que $Z = X + iY$ soit analytique par rapport à $z = x + iy$ (on pourra écrire les conditions de Cauchy-Riemann), puis exprimer Z en fonction de z.

3 - Reprendre la même démarche en partant de $X(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Exercice 5 – Intégrale curviligne

On considère la function $f(z) = z + z^{-1}$. Calculer l'intégrale de $f(z)$ le long des contours suivants :

1 - un cercle de rayon $R = 2$ autour de l'origine $z_0 = 0$ dans le sens mathématique positif.

2 - un carré avec les angles situés à $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 + i$ et $z_4 = -1 - i$ dans le sens $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_4$.

Help : $\int_{-b}^{b} dt \frac{1}{t^2+a^2} = \frac{2}{a} \arctan \frac{b}{a}$.

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE : **Exercice 6**

Soit la fonction analytique $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$, qui fait apparaître les coordonnées polaires (ρ, φ) de $z = \rho e^{i\varphi}$.

1 - Comment s'écrivent les conditions de Cauchy-Riemann en fonction de ρ et φ traduisant le fait que f est analytique ?

2 - En déduire les fonctions analytiques dont la partie réelle ne dépend que de $|z|$.