Université Joseph Fourier
L3 Physique - 2015/2016

Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 7 – Transformées de Fourier III

Exercice 1

Calculer le produit de convolution $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$, et le représenter graphiquement. Quel est la TF de $\Lambda(x)$?

Exercice 2

Soit le signal $f(x) = \delta(x) + \delta(x - x_0)$, c'est-à-dire deux pics de Dirac distants de x_0. Calculer et tracer le signal mesuré si la fonction de l'appareil est a) Π_l et b) $G_l = \exp[-x^2/2l^2]$. Traiter particulièrement les cas (i) $x_0 \ll l$, (ii) $x_0 \gg l$ et (iii) $x_0 \approx l$ (voir figure). Peut-on déterminer dans le cas de la gaussienne à partir de quel l il n'est plus possible de distinguer deux pics séparés ?

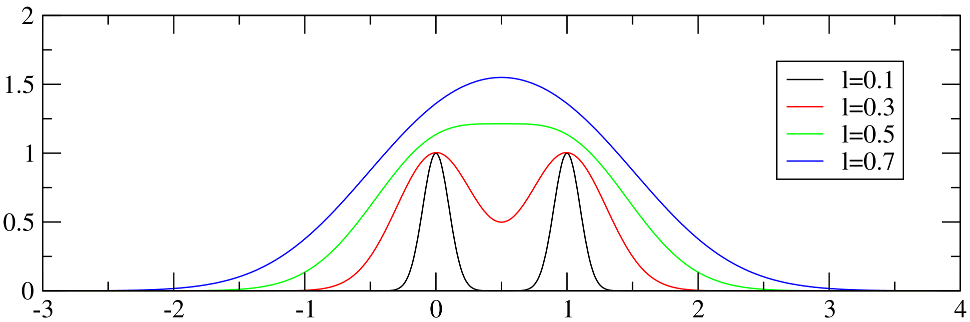

Figure 1 – La convolution du signal $\delta(x) + \delta(x-1)$ par des gaussiennes G_l de différentes largeurs.

Exercice 3

Démontrer que le produit de convolution de deux gaussiennes de largeurs l et p est encore une gaussienne :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{l^2+p^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(l^2+p^2)}\right].$$

Pour vraiment apprécier les TF, faire le calcul d'abord dans l'espace direct et ensuite à l'aide des TF.

Rappel : une gaussienne de largeur l est la fonction

$$G_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l} \exp\left[-\frac{x^2}{2l^2}\right].$$

Exercice 4

Démontrer que la densité de probabilité de la *moyenne* de deux variables aléatoires est donnée par $h(z) = 2(f * g)(2z)$. Soient deux variables aléatoires de densité gaussienne de même largeur. Quelle est la densité de leur moyenne ?

Exercice 5

Soient deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densité $f(X_1)$ et $g(X_2)$. Quelle est la densité de probabilité de la variable $Z = X_2 - X_1$?

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE : **Exercice 6 - Algèbre de convolution.**

1 - Montrer que $(f * \delta')(x) = f'(x)$.

2 - Montrer que $*$ est associatif : $(f * g) * h = f * (g * h)$. Cela permet de donner un sens aux puissances de convolution : $f^{*2} = f * f$, $f^3 = f * f * f$ et ainsi de suite.

3 - Dorénavant, on note $p(x) = \delta'(x)$ pour alléger les notations. Que vaut $f * p^{*n}$? Montrer qu'une équation différentielle $\sum a_n f^{(n)}(x) = b(x)$ peut se mettre sous la forme $(\sum a_n p^{*n}) * f = b(p^{*0} = \delta)$.

Ceci forme le cœur du calcul symbolique inventé par Heaviside. Si on savait définir les opérations 'łqinverses" de $*$ (et donc la distribution p^{-1}), la résolution des équations différentielles se réduirait aux équations algébriques. Cette branche des mathématiques s'appelle "calcul opérationnel".