Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 6 – Transformées de Fourier II

Exercice 1 – Équation de propagation d'un ressort infiniment long.
Si $u(x,t)$ représente un petit déplacement d'une partie d'un ressort, parallèlement au ressort au temps t à la position x sur le ressort, alors le ressort est le siège d'oscillations longitudinales décrites par l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

avec $u(x,0) = 0$ et $\partial u(x,t)/\partial t|_{t=0} = (a^2/\tau)\,\delta(x)$, où a est une longueur et τ est un temps fixé par l'expérimentateur.

Soit $\tilde{u}(q,t)$ la transformée de Fourier spatiale de $u(x,t)$.

1 - Montrer que $\tilde{u}(q,t)$ obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(q,t)}{\partial t^2} = -c^2 q^2 \tilde{u}(q,t). \tag{2}$$

2 - Donner la solution de l'équation Eq. (2) pour $\tilde{u}(q,t)$ dans les cas (i) $q \neq 0$ et (ii) $q = 0$. Discuter des constantes dans ce dernier cas.

3 - Montrer alors que $u(x,t)$ peut se mettre sous la forme de d'Alembert,

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

4 - Que représentent physiquement les fonctions F et G ?

5 - En utilisant les conditions aux limites à $t = 0$ tracer $u(x,t)$ à différents instants.

Aide : $1/q = \mathrm{TF}[(i/2)\,\mathrm{sign}(x)]$.

Exercice 2
Soit la fonction créneau $f(x) = 1$ si $-a \leq x \leq a$ et $f(x) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $\tilde{f}(q)$. Tracer schématiquement $\tilde{f}(q)$. Soit Δl la demi-largeur du créneau et Δq la demi-largeur de sa TF, calculer la valeur du produit $\Delta l\,\Delta q$.

Exercice 3 – Formule de sommation de Poisson.
Nous allons démontrer la formule de sommation de Poisson,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{3}$$

avec $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$.

a) On définit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT).$$

Démontrer que $\phi(t)$ est T-périodique.

b) Donner la série de Fourier complexe $\phi_F(t)$ de $\phi(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0,T]$.

c) Démontrer que les coéfficients c_k de la série de Fourier complexe sont donnés par

$$c_k = \frac{1}{T}\tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$

[Vous avez le droit de changer l'ordre de la somme et de l'intégrale.]

d) Utiliser $\phi(0) = \phi_F(0)$ pour démontrer la formule de sommation de Poisson (3).

Application : calcul de la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

e) La TF de $f(t) = 1/(1+t^2)$ est donnée par $\tilde{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Utiliser la formule de sommation de Poisson (3) pour exprimer la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\tilde{f}(\omega)$.

f) Evaluer la somme en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.