Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 4 – Séries de Fourier III

Exercice 1 – Polynômes de Legendre.
Nous avons vu que les polynômes de Legendre $L_n(x)$ sont des polynômes de degrès n qui vérifient l'équation de Legendre,

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

Nous voulons démontrer que cette définition des polynômes de Lengendre implique qu'ils sont orthogonaux les uns aux autres sur l'intervalle $[-1,1]$.

a) Vérifier que l'équation de Legendre peut se mettre sous la forme :

$$[(1-x^2)L_n'(x)]' + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

b) Demontrer que le produit scalaire $(L_n, L_m) = 0$ sur l'intervalle $[-1,1]$ si $m \neq n$.

Aide : Faire cela (i) en écrivant l'équation de Legendre sous cette forme pour deux valeurs n et m :

$$\begin{aligned} [(1-x^2)L_n'(x)]' + n(n+1)L_n(x) &= 0, \\ [(1-x^2)L_m'(x)]' + m(m+1)L_m(x) &= 0; \end{aligned}$$

(ii) en multipliant la première relation par $L_m(x)$ et la seconde par $L_n(x)$; (iii) en intégrant entre -1 et 1 (il faudra problablement intégrer par partie à un moment ou un autre) ; (iv) en retranchant l'une des égalités ainsi obtenues de l'autre.

Exercice 2 – Périodicité.
On considère la fonction

$$f(x) = \sin(5\pi x) - \cos(8\pi x).$$

— Donner la période L de cette fonction.
— Donner les coefficients de la série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, L]$.

Exercice 3 – Variation d'une population : Fonction génératrice.
On suppose que la taille d'un système varie de façon aléatoire avec une probabilité de passer de n à $n \pm 1$ qui est proportionnelle à n. La probabilité $P_n(t)$ qu'à l'instant t le système ait la taille n obéit à l'équation

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\left\{(n-1)P_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1}(t) - 2nP_n(t)\right\}.$$

Ici $\tau > 0$ est un temps caractéristique. Nous supposons que $P_1(t=0) = 1$ et $P_{n\neq 1}(t=0) = 0$.

Nous allons considérer les probabilités $P_n(t)$ comme les coefficients de la série de Fourier complexe d'une fonction $u(x,t)$ définie sur l'intervalle $\mathcal{I} = [-\pi, \pi]$, c'est-à-dire

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(t) e^{inx}.$$

a) Donner une expression pour $P_n(t)$ en fonction de $u(x,t)$.

b) Utiliser les conditions initiales pour trouver $u(x,0)$.

c) Démontrer que $u(x,t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{2i}{\tau}(\cos x - 1)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{4i}{\tau}\sin^2\frac{x}{2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

d) En faisant les substitutions $T = 2t/\tau$ et $z = 1/\tan(x/2)$, l'équation différentielle prend la forme beaucoup plus simple

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + i\frac{\partial}{\partial z}\right) u(z,T) = 0.$$

Démontrer que $u(z,T) = f(z - iT)$, où f est une fonction dérivable arbitraire, est une solution de l'équation différentielle.

e) Déterminer $u(z,0) = f(z)$ en utilisant le résultat de b).

Help : $e^{ix} = e^{ix/2}/e^{-ix/2}$ et $e^{\pm ix/2} = \cos(x/2) \pm i\sin(x/2)$.

f) Donner la solution $u(x,t)$.

g) Déterminer les probabilités $P_n(t \to \infty)$ pour des temps longs.

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE : **Exercice 4**

Soit une fonction L-périodique, c'est à dire $f(x \pm L) = f(x)$. Écrire sa décomposition en série de Fourier sur l'intervalle $[0, L]$ (appelons les coefficients a_n et b_n) et l'intervalle $[0, 2L]$ (appelons les coefficients α_n et β_n). Quelles sont les relations entre les coefficients des séries de Fourier ? Commenter ce résultat.