Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 3 – Séries de Fourier II

Exercice 1 – Equation de Schrödinger dans un puits

Considérons un puits de potentiel *très profond*, à une seule dimension. Rappelons l'équation de Schrödinger dans ce cas-là :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

où $\psi(x,t)$ représente la fonction d'onde recherchée.
Considérons les conditions aux limites suivantes :
- sur les bords, à tout instant : $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$,
- à l'instant initial, pour tout x : $\psi(x,0) = f(x)$,

où f est une fonction imposée, développable en série de Fourier, et $[0;L]$ est l'intervalle qui définit le puits.
Discuter la signification physique de ces conditions aux limites, puis déterminer la forme des solutions à cette équation différentielle.

Exercice 2 – Équation de la chaleur en environnement variable.

Nous souhaitons déterminer la répartition de la température dans une barre sans perte latérale dont une des extrémités est maintenue à température nulle et l'autre à une température variable dans le temps. Nous supposons qu'initialement la barre est à température nulle. Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

avec les conditions suivantes :

$$u(0,t) = 0, \tag{2}$$
$$u(L,t) = h(t), \tag{3}$$
$$u(x,0) = 0. \tag{4}$$

Ici D est le coefficient de diffusion ; L la longueur de la barre ; $h(t)$ une fonction connue qui désigne la variation de la température à l'extrémité $x = L$ de la barre et nous supposons de plus que $h(0) = 0$.

a) Décomposer la fonction $f(x) = x/L$ en série de sinus sur l'intervalle $[0, L]$.

Nous admettrons par la suite que les coefficients de la série de sinus de la fonction $g(x) = (x/L)[1-(x/L)^2]$ sont :

$$\beta_n = \frac{-12}{\pi^3}\frac{(-1)^n}{n^3}.$$

b) Il est évident que nous ne pouvons pas décomposer la fonction inconnue $u(x,t)$ en série de sinus directement : les conditions aux limites ne nous permettent pas d'effectuer les dérivations terme à terme. Considérons la fonction

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{x}{L}h(t). \tag{5}$$

Démontrer que $w(x,t)$ obéit à une équation de la chaleur avec source,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{x}{L}h'(t). \tag{6}$$

Quelles sont les conditions aux limites *et* initiales pour la fonction w ?

c) Dorénavant, nous supposons que $h(t) = \alpha t$, où α est une constante. Résoudre l'équation (6) en utilisant les séries de sinus. Par résoudre, il faut entendre : "obtenir explicitement les coefficients de la série de sinus de la fonction w".

Note 1 : Pour le cas particulier que nous sommes en train de résoudre, $h'(t) = \alpha$ est une constante. Décomposer $(h'(t)/L)\, x$ en série de $\sin(n\pi x/L)$ ne pose donc pas de difficultés particulières. Pour le cas général (par exemple dans le cas où l'extrémité L serait soumise à une température oscillante, $h(t) = \alpha \sin(\omega t)$), il est évident que $h'(t)$ ne dépend pas de x et intervient comme une constante dans la décomposition de $(h'(t)/L)\, x$.

Note 2 : La solution de l'équation $y' + ay = g(t)$ est

$$y(t) = \exp(-at) \left[y_0 + \int_0^t g(\tau) \exp(a\tau) d\tau \right], \tag{7}$$

où $y_0 = y(t = 0)$. Si vous n'aimez pas cette formule, utiliser la méthode habituelle de "la solution générale plus la solution particulière", qui revient bien sûr au même.

d) Quelle est la solution stationnaire $w_s(x)$ de l'équation (6) ?

e) Quelle est la limite de la fonction $w(x, t)$ pour les temps grands, c'est-à-dire quand $t \to \infty$? En utilisant les résultats de la première question, en donner la forme analytique exacte. Comparer à la solution stationnaire trouvée plus haut. Tracer la forme de la fonction w dans cette limite.

f) Que vaut finalement la fonction que l'on cherche vraiment, c'est-à-dire $u(x, t)$? Quelle est sa forme asymptotique pour les temps larges ? Tracer la fonction $u(x, t)$ en fonction de x dans cette approximation – i.e., pour un temps (large) donné.

Exercice 3 – Série de Fourier complexe

1 - Décomposer $f(x)$ en série de Fourier complexe et, en identifiant terme à terme avec la série de Fourier en cos et sin, déterminer la relation entre les c_n et c_{-n} et les a_n et b_n $(n \geq 0)$.

2 - En utilisant les résultats ci-dessus et la définition de a_n et b_n, déterminer l'expression (forme intégrale) des c_n.

3 - Calculer la série de Fourier en cos et sin pour $f(x) = x$ sur $[0, L]$ et en déduire les c_n d'après la formule précédente.

4 - Vérifier en calculant directement les c_n de la série de Fourier complexe pour $f(x) = x$ sur $[0, L]$.