Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 2 – Séries de Fourier I

Conditions de Dirichlet :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période L satisfaisant aux conditions suivantes :
- Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.
- f admet en tout point une dérivé à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier $f_F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(2\pi nx/L) + b_n \sin(2\pi nx/L)]$ associée à f est convergente et on trouve
$$f_F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right]$$
avec $x_\pm = x \pm \delta$ et $\delta \to 0$. En particulier, $f_F(x) = f(x)$ si f est continue en x.
De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

[On dit qu'on point x est une discontinuité de première espèce de f, si f n'est pas continue en x et les limites à droite et à gauche, $\lim_{\delta\to 0} f(x \pm \delta)$, existent.]

Exercice 1

Est-ce que les fonctions $1/x$ et $\sin(1/x)$ sont développables en séries de Fourier dans un intervalle comprenant $x = 0$?

Exercice 2

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = x^2$. En déduire les valeurs des séries suivantes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$
Ce résultat fut une des fiertés d'Euler lorsqu'il l'établit vers 1730 ...

Exercice 3

On considère la fonction "palier" définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$
Trouver sa décomposition en série de Fourier.

Exercice 4 – Corde vibrante et force magnétique

On considère une corde métallique fixée à ses extrémités en $x = 0$ et en $x = L$, et on s'intéresse aux petits déplacements transversaux $y(x, t)$, en négligeant la pesanteur et les forces de frottement. La corde est plongée dans un champ magnétique $B(x) = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ constant et orienté selon (Oz) ; cette corde est de plus parcourue par un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. L'équation différentielle vérifiée est alors de la forme
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{I_0 B_0}{\mu} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t),$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec T la tension de la corde et μ sa masse linéique.
La déformation initiale est supposée de la forme $y(x, t = 0) = f(x)$, où f est une fonction développable en série de Fourier, et la corde est lancée sans vitesse initiale ; déterminer les solutions à cette équation.

Exercice 5 – Base de Fourier, base de sinus, base de cosinus

1 - Donner l'expression des coefficients a_n et b_n pour une fonction $f(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

a) en base de Fourier pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$,
b) en base de Fourier pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[-L, L]$,
c) en base de cosinus pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$,
d) en base de sinus pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$.

Pour chaque cas indiquer la périodicité de la fonction générée.

2 - Représenter graphiquement la série de Fourier obtenue dans les cas a), c) et d) pour la fonction $f(x) = x$.

3 - De façon générale, indiquer comment, et sur quel intervalle, étendre $f(x)$ définie sur $[0, L]$ de façon à ce qu'une décomposition sur la base de Fourier de la nouvelle fonction étendue donne une série identique à :

(i) une décomposition sur la base des sinus,
(ii) une décomposition sur la base des cosinus.

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE : **Exercice 6**

La fonction "trapèze" peut être définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1/2[, \\ \frac{x-1/2}{s} & \text{si } x \in [1/2; 1/2 + s[, \\ 1 & \text{si } x \in [1/2 + s; 1]. \end{cases}$$

Déterminer sa décomposition en série de Fourier, puis étudier le cas particulier pour lequel $s \to 0$ qui illustre bien que : *plus les variations d'une fonction sont rapides, plus ses composantes de "grandes fréquences" prennent de l'importance ...*