UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — JULIA MEYER (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 PHYSIQUE - 2015/2016 — MOURAD ISMAIL (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 17 – Opérateurs linéaires II

Exercice 1 – Equation d'onde.
Résoudre symboliquement l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,t)|_{t=0} = g(x)$ en l'écrivant sous la forme symbolique $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 D^2 u = 0$ et en vous inspirant de la solution de l'équation ordinaire $\ddot{u} - a^2 u = 0$.

Exercice 2 – Opérateur moment angulaire.
Soit l'opérateur $L_x = Y\partial_z - Z\partial_y$, et L_y, L_z définis de la même façon par permutation circulaire (x, y, z). Démontrer que

$$[L_x, L_y] = -L_z.$$

En déduire les deux autres relations par permutation circulaire.
Soit maintenant l'opérateur $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Démontrer que L^2 et L_μ commutent, où $\mu = x, y, z$.

Exercice 3 – Opérateur différentiel
Démontrer que

$$D^2 - X^2 = (D + X)(D - X) + 1 = (D - X)(D + X) - 1.$$

En déduire $[D - X, D + X]$ et $[D^2 - X^2, D \pm X]$.

Exercice 4 – Fonctions d'Hermite.
Soit les fonctions d'Hermite

$$h_n(x) = C_n(-1)^n \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] \frac{d^n}{dx^n} \exp\left[-x^2\right].$$

On peut démontrer que les fonctions h_n forment une base.
Démontrer que pour l'opérateur $H = -D^2 + X^2$, nous avons $Hh_n(x) = (2n + 1)h_n(x)$. Donner alors la représentation de H dans la base des h_n.

Exercice 5 – Valeurs et vecteurs propres.
Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses valeurs et vecteurs propres. En déduire les valeurs et vecteurs propres de $\exp[tM]$.

Exercice 6 – Oscillateur harmonique.

On définit $A = D + X$.

a) Trouver $A^\dagger$. En déduire $[A, A^\dagger] = 2$.

b) Écrire $H = -D^2 + X^2$ en fonction de A et $A^\dagger$.

c) Soit $H\psi_E = E\psi_E$. Trouver $HA^\dagger\psi_E$.

d) Il existe une fonction ψ_0 pour laquelle $A\psi_0 = 0$. Trouver $H\psi_0$ et déterminer ψ_0.

e) Soit $H\psi_n = (2n + 1)\psi_n$. Utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer ψ_n.