Université Joseph Fourier
L3 Physique - 2015/2016

Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
Corrigé TD 17 – Opérateurs linéaires II

Exercice 1 – Equation d'onde.
Résoudre symboliquement l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,t)|_{t=0} = g(x)$ en l'écrivant sous la forme symbolique $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 D^2 u = 0$ et en vous inspirant de la solution de l'équation ordinaire $\ddot{u} - a^2 u = 0$.

<u>Solution</u> : L'ED $\ddot{u} - a^2 u = 0$ a la solution générale $u(t) = Ae^{at} + Be^{-at}$. La solution symbolique de l'équation d'onde prend donc la forme

$$u(x,t) = e^{cDt} A(x) + e^{-cDt} B(x).$$

Avec les conditions initiales, $u(x,t) = A(x) + B(x) = f(x)$ et $\dot{u}(x,0) = cDA(x) - cDB(x) = g(x)$, soit $B(x) = f(x) - A(x)$ et

$$c\left\{A'(x) - \left[f'(x) - A'(x)\right]\right\} = g(x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c}\int^x dx'\, g(x')\right),$$

on trouve

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{e^{cDt}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int^x dx'\, g(x')\right] + e^{-cDt}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int^x dx'\, g(x')\right]\right\}.$$

On utilise $e^{\pm cDt} f(x) = f(x \pm ct)$ pour obtenir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\left[G(x+ct) - G(x-ct)\right]\right\},$$

où $G(x) = \int^x dx'\, g(x')$.

Exercice 2 – Opérateur moment angulaire.
Soit l'opérateur $L_x = Y\partial_z - Z\partial_y$, et L_y, L_z définis de la même façon par permutation circulaire (x,y,z). Démontrer que

$$[L_x, L_y] = -L_z.$$

En déduire les deux autres relations par permutation circulaire.
Soit maintenant l'opérateur $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Démontrer que L^2 et L_μ commutent, où $\mu = x,y,z$.

<u>Solution</u> : On trouve $[L_z, L_x] = -L_y$ et $[L_y, L_z] = -L_x$. Donc

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x] = [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= -L_yL_z - L_zL_y + L_zL_y + L_yL_z = 0.
\end{aligned}$$

De même pour L_y et L_z.

Exercice 3 – Opérateur différentiel

Démontrer que

$$D^2 - X^2 = (D+X)(D-X) + 1 = (D-X)(D+X) - 1.$$

En déduire $[D-X, D+X]$ et $[D^2 - X^2, D \pm X]$.

Solution : On applique les opérateurs à une fonction $f(x)$ arbitraire :

$$\begin{aligned}
(D^2 - X^2)f(x) &= f"(x) - x^2 f(x), \\
[(D+X)(D-X)+1]\,f(x) &= (D+x)[f'(x) - xf(x)] + f(x) \\
&= f"(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) - x^2 f(x) + f(x) \\
&= f"(x) - x^2 f(x) = (D^2 - X^2)f(x), \\
[(D-X)(D+X)-1]\,f(x) &= (D-x)[f'(x) + xf(x)] - f(x) \\
&= f"(x) - xf'(x) + f(x) + xf'(x) - x^2 f(x) - f(x) \\
&= f"(x) - x^2 f(x) = (D^2 - X^2)f(x).
\end{aligned}$$

Donc $D^2 - X^2 = (D+X)(D-X) + 1 = (D-X)(D+X) - 1$.

Alternative : On utilise $[D, X] = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
(D+X)(D-X)+1 &= D^2 - DX + XD - X^2 + 1 = D^2 - X^2 - [D,X] + 1 = D^2 - X^2, \\
(D-X)(D+X)-1 &= D^2 + DX - XD - X^2 - 1 = D^2 - X^2 + [D,X] - 1 = D^2 - X^2.
\end{aligned}$$

Par la suite on obtient

$$0 = (D-X)(D+X) - 1 - [(D+X)(D-X)+1] = [D-X, D+X] - 2,$$

c'est-à-dire, $[D-X, D+X] = 2$. En outre

$$\begin{aligned}
\left[D^2 - X^2, D+X\right] &= [(D+X)(D-X)+1]\,(D+X) - (D+X)\,[(D-X)(D+X)-1] = 2(D+X), \\
\left[D^2 - X^2, D-X\right] &= [(D-X)(D+X)-1]\,(D-X) - (D-X)\,[(D+X)(D-X)+1] = -2(D-X).
\end{aligned}$$

Exercice 4 – Fonctions d'Hermite.

Soit les fonctions d'Hermite

$$h_n(x) = C_n(-1)^n \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] \frac{d^n}{dx^n} \exp\left[-x^2\right].$$

On peut démontrer que les fonctions h_n forment une base.

Démontrer que pour l'opérateur $H = -D^2 + X^2$, nous avons $Hh_n(x) = (2n+1)h_n(x)$. Donner alors la représentation de H dans la base des h_n.

Solution : On calcule

$$\begin{aligned}
Hh_n(x) &= (-D^2 + X^2)C_n(-1)^n \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] \\
&= -C_n(-1)^n D^2 \left\{\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right]\right\} + X^2 h_n(x).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& -C_n(-1)^n D^2 \left\{ \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] \right\} \\
= \quad & -C_n(-1)^n D \left\{ X \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] + \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^{n+1} \exp\left[-x^2\right] \right\} \\
= \quad & -C_n(-1)^n \left\{ \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] + X^2 \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] \right. \\
& \left. +2X \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^{n+1} \exp\left[-x^2\right] + \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^{n+2} \exp\left[-x^2\right] \right\} \\
= \quad & -(1+X^2)h_n(x) - C_n(-1)^n \left\{ 2\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] X D^{n+1} \exp\left[-x^2\right] - 2\exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^{n+1} X \exp\left[-x^2\right] \right\}.
\end{aligned}$$

Soit

$$Hh_n(x) \quad = \quad -h_n(x) + 2C_n(-1)^n \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] [D^{n+1}, X] \exp\left[-x^2\right].$$

Avec

$$\begin{aligned}
[D, X] &= 1 \\
\left[D^2, X\right] &= D[D, X] + [D, X]D = 2D \\
\left[D^3, X\right] &= D[D^2, X] + [D, X]D^2 = 3D^2 \\
\ldots & \\
[D^n, X] &= nD^{n-1},
\end{aligned}$$

on obtient

$$Hh_n(x) \quad = \quad -h_n(x) + 2(n+1)C_n(-1)^n \exp\left[\frac{x^2}{2}\right] D^n \exp\left[-x^2\right] = (2n+1)h_n(x).$$

Donc

$$H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 – Valeurs et vecteurs propres.
Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses valeurs et vecteurs propres. En déduire les valeurs et vecteurs propres de $\exp[tM]$.

<u>Solution</u> : Les valeurs propres sont déterminées par $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$. *Donc*

$$(1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0,$$

soit

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 3, \\ -1. \end{cases}$$

Pour les vecteurs propres, on obtient :

$$x_1 - z_1 = x_1, \qquad 3x_1 + y_1 + z_1 = y_1, \qquad -4x_1 + z_1 = z_1.$$

Donc $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0)$.

$$x_2 - z_2 = 3x_2, \qquad 3x_2 + y_2 + z_2 = 3y_2, \qquad -4x_2 + z_2 = 3z_2.$$

Donc $z_2 = -2x_2 = -4y_2$, *c'est-à-dire,* $\mathbf{e}_2 = (2, 1, -4)/\sqrt{21}$.

$$x_3 - z_3 = -x_3, \qquad 3x_3 + y_3 + z_3 = -y_3, \qquad -4x_3 + z_3 = -z_3.$$

Donc $z_3 = 2x_3 = -(4/5)y_3$, *c'est-à-dire,* $\mathbf{e}_3 = (2, -5, 4)/\sqrt{45}$.

Avec $M^n \mathbf{e}_i = \lambda_i M^{n-1} \mathbf{e}_i = \lambda_i^2 M^{n-2} \mathbf{e}_i = \ldots \lambda_i^n \mathbf{e}_i$, *on obtient*

$$\exp[tM]\mathbf{e}_i \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n M^n \mathbf{e}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \lambda^n \mathbf{e}_i = e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i.$$

Donc les vecteurs propres sont les mêmes tandis que les valeurs propres sont données par $\Lambda_i = \exp[\lambda_i t]$.

Exercice 6 – Oscillateur harmonique.

On définit $A = D + X$.

a) Trouver $A^\dagger$. En déduire $[A, A^\dagger] = 2$.

b) Écrire $H = -D^2 + X^2$ en fonction de A et $A^\dagger$.

c) Soit $H\psi_E = E\psi_E$. Trouver $HA^\dagger\psi_E$.

d) Il existe une fonction ψ_0 pour laquelle $A\psi_0 = 0$. Trouver $H\psi_0$ et déterminer ψ_0.

e) Soit $H\psi_n = (2n + 1)\psi_n$. Utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer ψ_n.

Solution :

a) $A^\dagger$ *est définit par* $(f, Ag) = (A^\dagger f, g)$, *où* f, g *sont des fonctions de carré sommable, soit*

$$(f, (D + X)g) = \int dx\; f^*(x) \left[\left(\frac{d}{dx} + x \right) g(x) \right] = \int dx\; \left[\left(-\frac{d}{dx} + x \right) f^*(x) \right] g(x) = ((-D + X)f, g)\,.$$

Donc $A^\dagger = -D + X$. $[A, A^\dagger] = 2$ *a été démontré dans l'exo 3.*

b) *D'après l'exo 3, on obtient* $H = A^\dagger A + 1 = AA^\dagger - 1$.

c) *On obtient*

$$HA^\dagger\psi_E = (A^\dagger A + 1)A^\dagger\psi_E = A^\dagger(AA^\dagger + 1)\psi_E = A^\dagger(H + 2)\psi_E = A^\dagger(E + 2)\psi_E = (E + 2)A^\dagger\psi_E.$$

d) *On obtient*

$$H\psi_0 = (A^\dagger A + 1)\psi_0 = \psi_0$$

avec $A\psi_0 = 0$. *En outre,* $A\psi_0 = \psi_0' + x\psi_0$. *Donc* $\psi_0 = C_0 \exp[-x^2/2]$.

e) *En utilisant les résultats de c) et d), on trouve*

$$\begin{aligned}
HA^\dagger\psi_0 &= (E_0 + 2)A^\dagger\psi_0 = 3A^\dagger\psi_0 \\
H\left(A^\dagger\right)^2\psi_0 &= (E_1 + 2)\left(A^\dagger\right)^2\psi_0 = (E_0 + 4)\left(A^\dagger\right)^2\psi_0 = 5\left(A^\dagger\right)^2\psi_0 \\
&\ldots \\
H\left(A^\dagger\right)^n\psi_0 &= (2n + 1)\left(A^\dagger\right)^n\psi_0.
\end{aligned}$$

Donc $\psi_n = C_n \left(A^\dagger\right)^n \psi_0$.
