Université Joseph Fourier
L3 Physique - 2015/2016

Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 16 – Opérateurs linéaires I

Exercice 1 – Identité de Jacobi.
Démontrer que pour trois opérateurs A, B, C, nous avons

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Exercice 2 – Commutateurs d'opérateurs.
Démontrer que les opérateurs O et $f(O)$ comuttent. $f(x)$ est une fonction analytique dans le voisinage de $x = 0$. Même chose pour $g(O)$ et $f(O)$. Démontrer que si A et B commutent, alors $f(A)$ et $g(B)$ commuttent.

Exercice 3 – Exponentielle d'un opérateur (I).
Démontrer que

$$\frac{d}{dt}\exp[tA] = A\exp[tA],$$

où A est un opérateur linéaire.
Aide : Utiliser le développement de l'exponentielle et les règles habituelles de la dérivation.

Exercice 4 – Exponentielle d'un opérateur (II).
Démontrer que

$$\exp[P^{-1}AP] = P^{-1}\exp[A]\,P,$$

où A, P sont deux opérateurs linéaires.

Exercice 5 – Commutation et exponentielle.
1 - Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2. En déduire une expression générale pour A^n selon que n est pair ou impair. Démontrer alors que

$$\exp[A] = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Aide : Décomposer la somme en termes pairs et impairs, et utiliser le développement en série des fonctions sin et cos.

2 - Soit maintenant les deux matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $C^2 = D^2 = 0$ et en déduire $e^C \cdot e^D$. Comparer $e^C \cdot e^D$ et e^{C+D}.