Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 14 – Calcul des perturbations I

Exercice 1

Soit l'équation

$$x^3 - 2x^2 - (1+\varepsilon)x + 2 = 0.$$

Une solution de l'équation non-perturbée (i.e. pour $\varepsilon = 0$) est $x_0 = 1$. Trouver la correction à cette racine à l'ordre 1 en ε.

Exercice 2

Trouver les corrections jusqu'à l'ordre 2 en ε de la racine de l'équation

$$x \sin x = \varepsilon$$

pour $x_0 = \pi$. Les solutions exactes pour $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.25$ sont respectivement 3.138406317, 3.109426839 et 3.059796698999. Comparer ces valeurs aux solutions approchées à l'ordre 1 et 2 trouvées précédemment.

Exercice 3

Soit l'équation :

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0. \qquad (1)$$

On remarque que la somme des coefficients de cette équation (non perturbée) vaut 0. Donc $x_0 = 1$ est une solution. On considère maintenant l'équation perturbée :

$$x^6 - 4x^5 + (2+\varepsilon)x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0. \qquad (2)$$

1 - Calculer la correction à la racine x_0 de l'équation (2) à l'ordre 1 en ε et comparer à la solution exacte de l'équation suivante :

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0 \qquad (3)$$

qui est $x = 1.10565$.

2 - Si on est courageux, on pourra calculer l'ordre 2 : $x_2 = \frac{1}{12}\frac{29}{144}$ et si on est très courageux on pourra calculer l'ordre 3 : $x_3 = \frac{1}{12}\frac{505}{10368}$. Montrer que l'on se rapproche de la valeur exacte quand on considère les ordres supérieurs à 1.

$\longrightarrow$ ...

Exercice 4

Un point de masse m est suspendu par une barre rigide de longueur l à un point qui lui-même est soumis à une oscillation horizontale d'amplitude a et pulsation ω. L'équation du mouvement de la masse est donnée par

$$l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin(\omega t)\cos\theta + g\sin\theta = 0.$$

Résoudre cette équation en supposant $\theta \ll 1$. Dans quelles conditions cette approximation est-elle valable ?

Exercice 5

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\lambda}{2}x^2 - \alpha y, \\ \\ \dot{y} = \frac{\lambda}{2}y^2 - \alpha x. \end{cases} \tag{4}$$

1- Est-ce-que la solution stationnaire $x(t) = y(t) = 0$ est stable ? Pour cela on représentera graphiquement le vecteur vitesse pour des valeurs voisines du point $O(x = 0, y = 0)$. Puis on donnera la solution analytique $[x(t), y(t)]$ des solutions au voisinage de O. On choisira pour cela les deux conditions initiales suivantes :

$$\text{(i) } [x(t=0) = \varepsilon, y(t=0) = \varepsilon] \quad \text{et} \quad \text{(ii) } [x(t=0) = -\varepsilon, y(t=0) = \varepsilon].$$

2- On s'aperçoit que se limiter à l'ordre 1, revient à linéariser le problème : on peut écrire $\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{r}$, où $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ est une matrice 2×2. Diagonaliser $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Commenter.

3- Le système d'équations (4) admet-il d'autres solutions stationnaires ? Sont-elles stables ?