Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

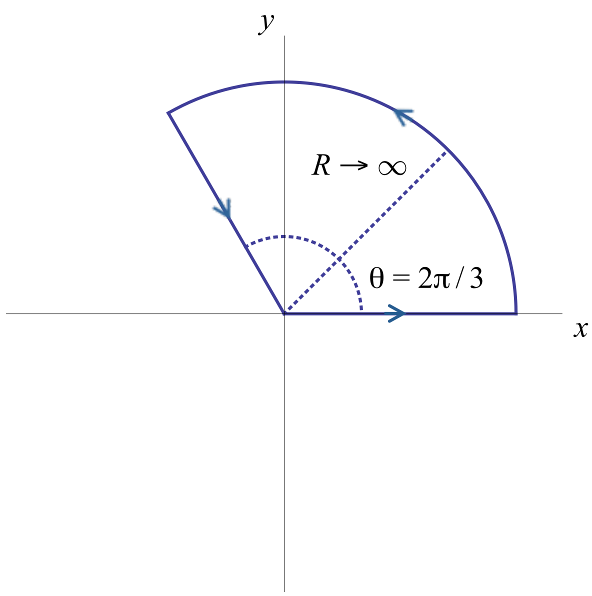
L3 – Mathématique pour la physique
TD 13 – Analyse Complexe IV

Exercice 1

Nous allons calculer l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx.$$

a) Trouver les singularités de la fonction $f(z) = z/(1+z^3)$. Déterminer l'ordre des pôles. Indiquer les pôles sur la figure.



b) Trouver les valeurs de φ tel que $f(re^{i\varphi}) = c_\varphi f(r)$ avec $c_\varphi \in \mathbb{C}$ pour tous $r \in [0, \infty[$. Déterminer la constante c_φ correspondante.

c) Exprimer l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de l'intégrale $\mathcal{I}'$ de $f(z)$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$, indiqué dans la figure. Justifier.

d) Déterminer

$$\mathcal{I}' = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{1+z^3} dz$$

par les calcul des résidus.

e) Obtenir le résultat pour l'intégrale $\mathcal{I}$.
Help :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\
\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{5\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

f) Indiquer un autre contour fermé $\mathcal{C}'$ sur la figure qui permettrait aussi de calculer $\mathcal{I}$.

Exercice 2
Trouver les pôles et les résidus correspondants de $f(z) = \tanh(z)$.

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE : **Exercice 3 – Transformées de Fourier et Analyse Complexe.**
Nous souhaitons résoudre l'équation

$$\dot{x} + \rho x = f(t)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+$.

a) Trouver une équation pour déterminer la TF de $x(t)$.

b) Obtenir $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$.

c) Utiliser des méthodes de l'analyse complexe pour prendre la TF inverse de $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$. Justifier toutes les étapes du calcul.

d) Démontrer que dans le cas général la solution peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s) x_\delta(t - s).$$

e) Obtenir $x(t)$ pour $f(t) = H(t)e^{-\nu t}$, où $\nu \in \mathbb{R}_+$ et $\nu \neq \rho$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside.

Rappel : $H(t) = 1$ pour $t \geqslant 0$ et $H(t) = 0$ sinon.