Université Joseph Fourier — Julia Meyer (julia.meyer@ujf-grenoble.fr)
L3 Physique - 2015/2016 — Mourad Ismail (mourad.ismail@ujf-grenoble.fr)

L3 – Mathématique pour la physique
TD 1 – Espaces vectoriels

Pour plus d'informations voir la page web de l'UE :
`http://inac.cea.fr/Pisp/julia.meyer/math-L3.html`

Exercice 1

Soient deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Démontrer l'inégalité de Schwartz :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Aide : On choisira un vecteur $\mathbf{A} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ où λ est un réel quelconque et on calculera $\|\mathbf{A}\|^2$.

Exercice 2

Soient deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel réel de dimension N. Montrer que la norme respecte l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| .$$

Exercice 3

On rappelle que le produit scalaire entre deux fonctions réelles s'écrit :

$$< f \mid g >= \int_I f(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit $\{f_i\}$ un ensemble de fonctions telles que toute fonction $\varphi(x)$ ou $\xi(x)$ réelle s'exprime comme :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, f_i(x) \quad \text{et} \quad \xi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i\, f_i(x).$$

Exprimer alors $< \xi|\varphi >$ et $< \varphi|\varphi >$ en considérant que l'ensemble $\{f_i\}$ constitue une base orthonormée de l'espace des fonctions réelles. Comparer à la définition de la norme $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$ pour des vecteurs.

Exercice 4

On appelle "polynômes de Legendre" un ensemble de polynômes $P_n(x)$ de degré n qui sont orthogonaux entre eux au sens du produit scalaire défini dans l'exercice 3 avec l'intervalle $I = [-1, 1]$.

1 - Trouver les trois premiers polynômes ($n = 0$, 1 et 2) de Legendre.

2 - Vérifier que les trois polynômes $n = 0, 1, 2$ que vous avez trouvés sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

En fait c'est le cas pour tous les polynômes de Legendre quel que soit leur degré. En réalité c'est pour cela que l'on utilise des polynômes orthogonaux, ils sont solutions d'équations différentielles que l'on rencontre en physique.