Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen final – 7 janvier 2016 (CORRIGÉ)

1. Quelques questions courtes (pas de calcul nécessaire). *(∼15% $\sum = 13$ points)*

a) *[5 points]* On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Déterminer les points où les séries de (i) Fourier, (ii) sinus et (iii) cosinus ne convergent pas vers la valuer de la fonction et donner les valeurs des séries dans ces points.

<u>Solution</u> *: Aux bords la fonction $f(x)$ prend les valeurs $f(0) = 0$ et $f(1) = -1/2$. En outre, la fonction $f(x)$ a une discontinuité de premier espèce en $x_0 = 1/2$ avec $f(x_0 - 0^+) = 1$ and $f(x_0 + 0^+) = 0$. En utilisant les conditions de Dirichlet, on trouve les résultats suivants.*

— *Série de Fourier : La série de Fourier ne converge pas vers la valeur de la fonction en $x = 0, 1/2, 1$. Dans ces points, elle prend les valeurs $f_F(1/2) = (f(1/2 - 0^+) + f(1/2 + 0^+))/2 = 1/2$ et $f_F(0) = f_F(1) = (f(0) + f(1))/2 = -1/4$.*
— *Série de sinus : La série de sinus ne converge pas vers la valeur de la fonction en $x = 1/2, 1$. Dans ces points, elle prend les valeurs $f_s(1/2) = (f(1/2 - 0^+) + f(1/2 + 0^+))/2 = 1/2$ et $f_s(1) = 0$.*
— *Série de cosinus : La série de cosinus ne converge pas vers la valeur de la fonction en $x = 1/2$. Dans ce points, elle prend la valeur $f_c(1/2) = (f(1/2 - 0^+) + f(1/2 + 0^+))/2 = 1/2$.*

---

b) *[2 points]* On considère une fonction f qui est analytique en $\mathbb{C}\backslash\{z_0, z_1, z_2\}$ avec $z_0 = 0$, $z_1 = 5i$ et $z_2 = 6i$. Déterminer les rayons de convergence des séries de Laurent de f autour de ces trois points singuliers.

<u>Solution</u> *: Le rayon de convergence de la série de Laurent autour d'une singularité est donné par la distance minimale jusqu'à une autre singularité. Donc $R_0 = 5$ et $R_1 = R_2 = 1$.*

---

c) *[3 points]* On considère le polynôme $P(x) = 9x^3 + 27x^2 + x/128 - 36$. Proposer une méthode pour trouver les racines (approximatives) de ce polynôme.

<u>Solution</u> *: On remarque que le coéfficient du terme x est beaucoup plus petit que les autres coéfficients. On peut remplacer ce coéfficient par ϵ et faire un calcul perturbatif. A $\epsilon = 0$ la somme des autres coéfficients est nulle, donc une des racines est donnée par $x_0 = 1$ ce qui permet de réduire le problème à un polynôme d'ordre 2 soluble.*

---

c) *[3 points]* Exprimer la transformée de Fourier de $f \cdot (g * h)$ en fonction de $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$, $\tilde{g} = \mathrm{TF}[g]$ et $\tilde{h} = \mathrm{TF}[h]$.

<u>Solution</u> *: Avec $TF[a * b] = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$ et $TF[a \cdot b] = \frac{1}{2\pi} \tilde{a} * \tilde{b}$, on obtient*

$$TF[f \cdot (g * h)] = \frac{1}{2\pi} \tilde{f} * (\tilde{g} \cdot \tilde{h}).$$

2. Transformées de Fourier et analyse complexe : Equation de convection-diffusion *(∼35% $\sum$ = 21 points)*

Nous allons étudier l'équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + f(x,t),$$

avec $D, c > 0$.

a) *[2 points]* Déterminer les dimensions des constantes D et c.

Solution : On utilise $[D] = [\partial/\partial t]/[\partial^2/\partial x^2]$ et $[c] = [\partial/\partial t]/[\partial/\partial x]$. Avec $[\partial/\partial t] = \mathrm{s}^{-1}$ et $[\partial^n/\partial x^n] = \mathrm{m}^{-n}$, on trouve $[D] = \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ et $[c] = \mathrm{m/s}$.

---

b) *[1 point]* Prendre la TF de l'équation de convection-diffusion par rapport à x.

Solution : La TF de $u(x,t)$ par rapport à x est donnée par $\tilde{u}(q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-iqx}u(x,t)$. On trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(q,t) = -Dq^2\tilde{u}(q,t) - icq\tilde{u}(q,t) + \tilde{f}(q,t).$$

---

c) *[1 point]* Prendre la TF du résultat de b) par rapport à t.

Solution : La TF de $\tilde{u}(q,t)$ par rapport à t est donnée par $\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\tilde{u}(q,t)$. On trouve

$$i\omega\,\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = -Dq^2\,\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) - icq\,\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) + \tilde{\tilde{f}}(q,\omega).$$

---

d) *[1 point]* Donner une expression pour $\tilde{\tilde{u}}(q,\omega)$.

Solution : Le résultat de c) permet d'écrire

$$\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = \frac{\tilde{\tilde{f}}(q,\omega)}{Dq^2 + icq + i\omega}.$$

---

e) *[1 point]* Par la suite, nous prenons $f(x,t) = A\,\delta(x)\delta(t)$. Déterminer $\tilde{\tilde{f}}(q,\omega)$.

Solution : La TF est d'un δ de Dirac est 1. Donc $\tilde{\tilde{f}}(q,\omega) = A$.

Nous allons calculer la TF inverse de $\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = A/(Dq^2 + icq + i\omega)$ par rapport à ω en utilisant l'analyse complexe.

f) *[2 points]* Trouver les pôles de $\tilde{\tilde{u}}(q,z) = A/(Dq^2 + icq + iz)$ et déterminer leur ordre.

Solution : La fonction $\tilde{\tilde{u}}(q,z)$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ avec $Dq^2 + icq + iz_0 = 0$, c'est-à-dire, $z_0 = i(Dq^2 + icq)$. En z_0, la fonction $\tilde{\tilde{u}}(q,z)$ possède un pôle d'ordre 1.

---

g) *[3 points]* Spécifier les contours fermés qui permettent de calculer $\tilde{u}(q,t)$. Justifier votre réponse.

<u>Solution</u> : La TF inverse de $\tilde{\tilde{u}}(q,\omega)$ par rapport à ω est donnée par

$$\tilde{u}(q,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{i\omega t} \, \tilde{\tilde{u}}(q,\omega).$$

La fonction $\tilde{\tilde{u}}(q,z)$ est analytique à part des singularités isolées et elle tend à zero dans la limite $|z| \to \infty$. Selon le lemme de Jordan, on peut donc fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$ dans le plan complexe supérieur pour $t > 0$ et dans le plan complexe inférieur pour $t < 0$. C'est-à-dire,

$$\tilde{u}(q,t) = \frac{1}{2\pi} H(t) \oint_{\mathcal{C}_+} dz \; e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z) + \frac{1}{2\pi} H(-t) \oint_{\mathcal{C}_-} dz \; e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z).$$

---

h) *[4 points]* Utiliser le calcul des résidus pour obtenir $\tilde{u}(q,t)$.

<u>Solution</u> : D'après le calcul des résidus, l'intégrale sur un contour fermé est déterminée par les résidus que le contour enferme. La fonction $f(z) = e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z)$ a une seule singularité en z_0 – voir f) – avec $\Re[z_0] > 0$. Donc

$$\tilde{u}(q,t) = \frac{1}{2\pi} H(t) 2\pi i \, \mathrm{Res}[e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z); z_0].$$

Comme il s'agit d'un pôle d'ordre 1, le résidu est donné par

$$\mathrm{Res}[e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z); z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) e^{izt} \, \tilde{\tilde{u}}(q,z)] = -iAe^{iz_0 t}.$$

Le résultat est donc

$$\tilde{u}(q,t) = H(t) A \exp[-(Dq^2 + icq)t].$$

---

i) *[3 points]* Calculer la TF inverse de $\tilde{u}(q,t) = H(t) A \exp[-(Dq^2 + icq)t]$ par rapport à q.
RAPPEL : $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \exp[-x^2/2] = \sqrt{2\pi}$.

<u>Solution</u> : La TF inverse de $\tilde{u}(q,t)$ par rapport à q est donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \; e^{iqx} \tilde{u}(q,t) = \frac{1}{2\pi} H(t) A \int_{-\infty}^{\infty} dq \; e^{iqx - (Dq^2 + icq)t}.$$

On réécrit l'exposant sous la forme

$$iqx - (Dq^2 + icq)t = -Dt \left[q^2 + 2i \frac{x - ct}{2Dt} q - \frac{(x-ct)^2}{4D^2t^2} + \frac{(x-ct)^2}{4D^2t^2} \right] = -Dt \left(q + i \frac{x - ct}{2Dt} \right)^2 - \frac{(x-ct)^2}{4Dt}.$$

Puis on fait le changement de variable $z = \sqrt{2Dt}[q + i(x - ct)/(2Dt)]$. Cela permet d'obtenir

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} H(t) A \frac{1}{\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \; e^{-z^2/2} = H(t) A \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}}.$$

---

j) *[2 points]* Le résultat de i) et une gaussienne en fonction de x. Trouver le centre de cette gaussienne et sa largeur à mi-hauteur pour $t > 0$.

<u>Solution</u> : Le centre de la Gaussienne est donné par $x_0 = ct$. La largeur à mi-hauteur est déterminé par $u(x_0 + L/2, t) = u(x_0, t)/2$. Donc

$$A\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{L^2}{16Dt}} = \frac{1}{2}A\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \qquad \Rightarrow \qquad L = 4\sqrt{Dt\ln 2}.$$

---

h) *[1 point]* Montrer que pour $t > 0$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x,t)$ est une constante et donner sa valeur.

<u>Solution</u> : On utilise $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x,t) = \tilde{u}(0,t)$. Donc pour $t > 0$ on trouve $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x,t) = A$.

---

3. Calcul des perturbations : Propagation d'une épidémie *($\sim$25% $\sum = 16$ points)*

Pour modéliser la propagation d'une épidémie, on divise la population en trois catégories :
- x est le nombre d'individus qui n'ont pas contracté la maladie ;
- y est le nombre d'individus qui ont contracté la maladie et sont contagieux ;
- z est le nombre d'individus qui ont contracté la maladie et ne sont plus contagieux.

La propagation de l'épidémie est caractérisée par deux paramètres : la capacité de contagion $c > 0$ et la temps d'incubation τ. L'évolution en temps des différentes populations est donc donnée par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -cx(t)y(t), && (1)\\ \dot{y}(t) &= cx(t)y(t) - gy(t), && (2)\\ \dot{z}(t) &= gy(t), && (3) \end{aligned}$$

avec $g = 1/\tau$.

a) *[1 point]* Montrer que la population totale $N(t) = x(t) + y(t) + z(t)$ est constante.

<u>Solution</u> : En prenant la somme des trois équations, on trouve $\dot{N} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$. Donc $N =$cste.

On peut donc se réstreindre aux deux premières équations, $\dot{x} = -cxy$ et $\dot{y} = cxy - gy$. La valeur de z est donnée par $z = N - x - y$.

b) *[3 points]* Trouver les solutions stationnaires.

<u>Solution</u> : Pour obtenir une solution stationnaire, il faut les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -cxy = 0,\\ \dot{y} &= cxy - gy = (cx - g)y = 0. \end{aligned}$$

Pour que les deux équations soient satisfaites, il est nécessaire que $y_0 = 0$ tandis que x_0 est arbitraire.

---

c) *[5 points]* Déterminer la stabilité linéaire des solutions trouvées en b).

<u>Solution</u> : On linéarise les équations en utilisant $x(t) = x_0 + \epsilon x_1(t)$ et $y(t) = y_0 + \epsilon y_1(t)$. Au premier ordre en ϵ, on trouve

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -cx_0 y_1(t),\\ \dot{y}_1 &= (cx_0 - g)y_1(t). \end{aligned}$$

La deuxième équations nous donne

$$y_1(t) = Ae^{(cx_0-g)t}.$$

Par la suite, la première équations nous donne

$$x_1(t) = B - A\frac{cx_0}{cx_0 - g}e^{(cx_0-g)t}.$$

Dons la solution stationnaire est stable pour $cx_0 - g < 0$ tandis qu'elle est instable pour $cx_0 - g > 0$.

---

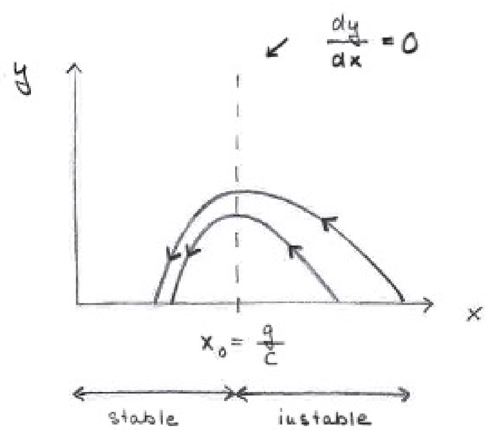
d) *[1 point]* Trouver la valeur de x pour laquelle $\dot{y} = 0$ quand $y \neq 0$.

<u>Solution</u> : *En prenant suelement la deuxième équation, on voit que $\dot{y} = 0$ pour $cx - g = 0$.*

---

e) *[3 points]* Tracer le portrait de phase, $y(x)$, schématiquement. Indiquer la direction de la variation en temps des populations sur les courbes tracées.

<u>Solution</u> : *En utilise les résultats de b)-d) pour tracer le schéma suivant :*



---

f) *[1 point]* Combiner les équations pour $\dot{x}$ et $\dot{y}$ pour trouver une équation pour dy/dx.

<u>Solution</u> : *On obtient*

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{g}{c}x^{-1}.$$

---

g) *[2 points]* Déterminer $y(x)$.

<u>Solution</u> : *En intégrant le résultat de f), on trouve*

$$y - y(t_0) = x(t_0) - x + \frac{g}{c}\ln\frac{x}{x(t_0)}.$$

---

h) BONUS : Sous quelles conditions est-ce qu'une vaccination serait avisée ?

<u>Solution</u> : *Une vaccination serait avisée pour $cx_0 - g > 0$.*

4. Opérateurs linéaires : Moment cinétique *($\sim$30% $\sum$ = 20 points)*

Dans l'espace des fonctions à trois variables, l'opérateur L_z est défini en coordonnées cartésiennes pas

$$L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

a) *[4 points]* On considère l'Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(r),$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $V(r)$ une fonction réelle. Trouver le commutateur $[L_z, H]$.

<u>Solution</u> : Pour trouver le commutateur, on utilise la relations $\partial r/\partial x_i = x_i/r$. On considère

$$\begin{aligned}
[L_z, H]\psi(x,y,z) &= (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})\left\{-\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(r)\right\}\psi(x,y,z) \\
&\quad -\left\{-\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(r)\right\}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})\psi(x,y,z) \\
&= -\frac{1}{2m}(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}x)\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y,z) + \frac{1}{2m}(y\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}y)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y,z) \\
&\quad +[(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})V(r) - V(r)(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})]\psi(x,y,z).
\end{aligned}$$

Le commutateur $[X, D^2] = XD^2 - DXD + DXD - D^2X = [X,D]D + D[X,D] = -2D$ nous permet de calculer les deux premiers termes tandis que le dernier terme devient $(x\partial V/\partial y - y\partial V/\partial x)\psi$. Donc

$$[L_z, H]\psi(x,y,z) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y,z) - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y,z) + [xy\frac{\partial V(r)}{\partial r} - yx\frac{\partial V(r)}{\partial r}]\psi(x,y,z) = 0.$$

---

b) *[2 points]* Donner la définition du produit scalaire dans l'espace des fonctions (de carré sommable) à valeurs complexes d'une variable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Généraliser à l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables, x, y, z.

<u>Solution</u> : Le produit scalaire est donné par

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; f^*(x)g(x).$$

La généralisation à trois dimensions prend la forme

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\; f^*(x,y,z)g(x,y,z).$$

---

c) *[3 points]* Dans l'espace mentionné ci-dessus, est ce que l'opérateur L_z est hermitien ? Est-ce que l'opérateur iL_z est hermitien ?

Solution : On opérateur est hermitien, si $(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g)$. Pour L_z, on trouve

$$\begin{aligned}(f, L_z g) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\; f^*(x,y,z)(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})g(x,y,z) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\; [(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})f(x,y,z)]^* g(x,y,z) = -(L_z f, g),\end{aligned}$$

où on a fait une intégration par partie. Donc L_z n'est pas hermitien. Par contre, iL_z est hermitien. On vérifie

$$\begin{aligned}(f, iL_z g) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\; f^*(x,y,z)i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})g(x,y,z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\; [i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})f(x,y,z)]^* g(x,y,z) = (iL_z f, g),\end{aligned}$$

---

d) *[1 point]* Est-ce que l'opérateur H est hermitien ?

Solution : En faisant deux intégrations par partie, on trouve $(f, Hg) = (Hf, g)$. Donc H est hermitien.

---

e) *[3 points]* En utilisant des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), on peut montrer que $L_z = \partial/\partial\phi$, où ϕ est la variable qui mesure l'angle de la projection du vecteur sur le plan $x - y$ avec l'axe x. Donner la forme générale des fonctions propres $f(r, \theta, \phi)$ et les valeurs propres correspondantes de l'opérateur iL_z.

Solution : Les fonctions propres obéissent $iL_z f(r,\theta,\phi) = \lambda f(r,\theta,\phi)$, où λ est la valeur propre correspondants. L'équation $i\partial f(r,\theta,\phi)/\partial\phi = \lambda\phi$ est résolu par

$$f(r,\theta,\phi) = e^{-i\lambda\phi} g(r,\theta),$$

où $g(r,\theta)$ est une fonction arbitraire.

---

f) *[2 points]* Utiliser la 2π-périodicité en ϕ des fonctions propres pour démontrer que les valeurs propres sont des nombres entiers.

Solution : On trouve

$$f(r,\theta,\phi + 2\pi) = e^{-i\lambda(\phi+2\pi)} g(r,\theta) = e^{-i2\pi\lambda} f(r,\theta,\phi).$$

Donc λ doit résoudre l'identité $e^{-i2\pi\lambda} = 1$ ce qui impose que λ est entier.

---

g) *[3 points]* Evaluer $\exp[\alpha L_z]g(r,\theta,\phi)$, où α est un scalaire réel et g est une fonction analytique à valeurs complexes de trois variables ($g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$). Que représente l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$?

Solution : On utilise la série $\exp[\alpha L_z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\alpha L_z)^k$ pour obtenir

$$\exp[\alpha L_z]g(r,\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k \frac{\partial^k}{\partial\phi^n} g(r,\theta,\phi) = g(r,\theta,\phi+\alpha).$$

Donc l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$ représente une rotation d'un angle α autour de l'axe z.

h) *[2 points]* Donner la forme générale des fonctions propres $f(r,\theta,\phi)$ et les valeurs propres correspondantes de l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$.

<u>*Solution*</u> *: On connait les fonctions propres* $f_n(r,\theta,\phi) = e^{-in\phi}g(r,\theta)$ *de* iL_z*. L'opérateur* $\exp[\alpha L_z]$ *a les mêmes fonctions propres. Les valeurs propres* A_n *correspondantes sont données par*

$$\exp[\alpha L_z]f_n(r,\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-i\alpha)^k(iL_z)^k e^{-in\phi}g(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-i\alpha)^k n^k e^{-in\phi}g(r,\theta) = e^{-i\alpha n}f_n(r,\theta,\phi).$$

Donc $A_n = \exp[-i\alpha n]$.