Université Joseph Fourier
L3 Physique

Julia Meyer
julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen final – 7 janvier 2016

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\,dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi nx/L} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{-2i\pi nx/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\pi n\frac{x}{L})\,dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n\frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\pi n\frac{x}{L})\,dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f(s) g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f^*(s) g(x+s)$$

Formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad\qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

Commutateur :

$$[A, B] = AB - BA$$

Opérateur adjoint :

$$(g, \mathcal{L}f) = (\mathcal{L}^\dagger g, f)$$

---

1. Quelques questions courtes (pas de longs calculs nécessaires). *(∼15%)*

a) On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Déterminer les points où les séries de (i) Fourier, (ii) sinus et (iii) cosinus ne convergent pas vers la valuer de la fonction et donner les valeurs des séries dans ces points.

b) On considère une fonction f qui est analytique en $\mathbb{C}\backslash\{z_0, z_1, z_2\}$ avec $z_0 = 0$, $z_1 = 5i$ et $z_2 = 6i$. Déterminer les rayons de convergence des séries de Laurent de f autour de ces trois points singuliers.

c) On considère le polynôme $P(x) = 9x^3 + 27x^2 + x/128 - 36$. Proposer une méthode pour trouver les racines (approximatives) de ce polynôme.

d) Exprimer la transformée de Fourier de $f \cdot (g * h)$ en fonction de $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$, $\tilde{g} = \mathrm{TF}[g]$ et $\tilde{h} = \mathrm{TF}[h]$.

---

2. Transformées de Fourier et analyse complexe : Equation de convection-diffusion *(∼35%)*

Nous allons étudier l'équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - c \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + f(x,t),$$

avec $D, c > 0$.

a) Déterminer les dimensions des constantes D et c.

b) Prendre la TF de l'équation de convection-diffusion par rapport à x.

c) Prendre la TF du résultat de b) par rapport à t.

d) Donner une expression pour $\tilde{\tilde{u}}(q, \omega)$.

e) Par la suite, nous prenons $f(x,t) = A\,\delta(x)\delta(t)$. Déterminer $\tilde{\tilde{f}}(q, \omega)$.

Nous allons calculer la TF inverse de $\tilde{\tilde{u}}(q, \omega) = A/(Dq^2 + icq + i\omega)$ par rapport à ω en utilisant l'analyse complexe.

f) Trouver les pôles de $\tilde{\tilde{u}}(q, z) = A/(Dq^2 + icq + iz)$ et déterminer leur ordre.

g) Spécifier les contours fermés qui permettent de calculer $\tilde{u}(q, t)$. Justifier votre réponse.

h) Utiliser le calcul des résidus pour obtenir $\tilde{u}(q,t)$.

i) Calculer la TF inverse de $\tilde{u}(q,t) = H(t)A\exp[-(Dq^2 + icq)t]$ par rapport à q.
RAPPEL : $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp[-x^2/2] = \sqrt{2\pi}$.

j) Le résultat de i) et une gaussienne en fonction de x. Trouver le centre de cette gaussienne et sa largeur à mi-hauteur pour $t > 0$.

h) Montrer que pour $t > 0$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ u(x,t)$ est une constante et donner sa valeur.

---

3. Calcul des perturbations : Propagation d'une épidémie *(∼25%)*

Pour modéliser la propagation d'une épidémie, on divise la population en trois catégories :
— x est le nombre d'individus qui n'ont pas contracté la maladie ;
— y est le nombre d'individus qui ont contracté la maladie et sont contagieux ;
— z est le nombre d'individus qui ont contracté la maladie et ne sont plus contagieux.
La propagation de l'épidémie est caractérisée par deux paramètres : la capacité de contagion $c > 0$ et la temps d'incubation τ. L'évolution en temps des différentes populations est donc donnée par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = -cx(t)y(t), \tag{1}$$
$$\dot{y}(t) = cx(t)y(t) - gy(t), \tag{2}$$
$$\dot{z}(t) = gy(t), \tag{3}$$

avec $g = 1/\tau$.

a) Montrer que la population totale $N(t) = x(t) + y(t) + z(t)$ est constante.

On peut donc se réstreindre aux deux premières équations, $\dot{x} = -cxy$ et $\dot{y} = cxy - gy$. La valeur de z est donnée par $z = N - x - y$.

b) Trouver les solutions stationnaires.

c) Déterminer la stabilité linéaire des solutions trouvées en b).

d) Trouver la valeur de x pour laquelle $\dot{y} = 0$ quand $y \neq 0$.

e) Tracer le portrait de phase, $y(x)$, schématiquement. Indiquer la direction de la variation en temps des populations sur les courbes tracées.

f) Combiner les équations pour $\dot{x}$ et $\dot{y}$ pour trouver une équation pour dy/dx.

g) Déterminer $y(x)$.

h) BONUS : Sous quelles conditions est-ce qu'une vaccination serait avisée ?

---

4. Opérateurs linéaires : Moment cinétique *(∼30%)*

Dans l'espace des fonctions à trois variables, l'opérateur L_z est défini en coordonnées cartésiennes pas

$$L_z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

a) On considère l'Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + V(r),$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $V(r)$ une fonction réelle. Trouver le commutateur $[L_z, H]$.

b) Donner la définition du produit scalaire dans l'espace des fonctions (de carré sommable) à valeurs complexes d'une variable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Généraliser à l'espace des fonctions à valeurs complexes de trois variables, x, y, z.

c) Dans l'espace mentionné ci-dessus, est ce que l'opérateur L_z est hermitien ? Est-ce que l'opérateur iL_z est hermitien ?

d) Est-ce que l'opérateur H est hermitien ?

e) En utilisant des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), on peut montrer que $L_z = \partial/\partial\phi$, où ϕ est la variable qui mesure l'angle de la projection du vecteur sur le plan $x - y$ avec l'axe x. Donner la forme générale des fonctions propres $f(r, \theta, \phi)$ et les valeurs propres correspondantes de l'opérateur iL_z.

f) Utiliser la 2π-périodicité en ϕ des fonctions propres pour démontrer que les valeurs propres sont des nombres entiers.

g) Evaluer $\exp[\alpha L_z] g(r, \theta, \phi)$, où α est un scalaire réel et g est une fonction analytique à valeurs complexes de trois variables ($g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$). Que représente l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$?

h) Donner la forme générale des fonctions propres $f(r, \theta, \phi)$ et les valeurs propres correspondantes de l'opérateur $\exp[\alpha L_z]$.