Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 22 octobre 2015 (CORRIGÉ)

1. Quelques questions courtes (pas de calcul nécessaire). *($\sum = 10$ points)*

a) *[4 points]* Donner un exemple d'une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

(i) La série de sinus f_s de la fonction converge vers la valeur de la fonction dans tous les points $x \in [0, 1]$.

(ii) La série de Fourier f_F de la fonction converge vers la valeur de la fonction dans tous les points $x \in [0, 1]$ tandis que ce n'est pas le cas pour sa série de sinus f_s.

Solution :

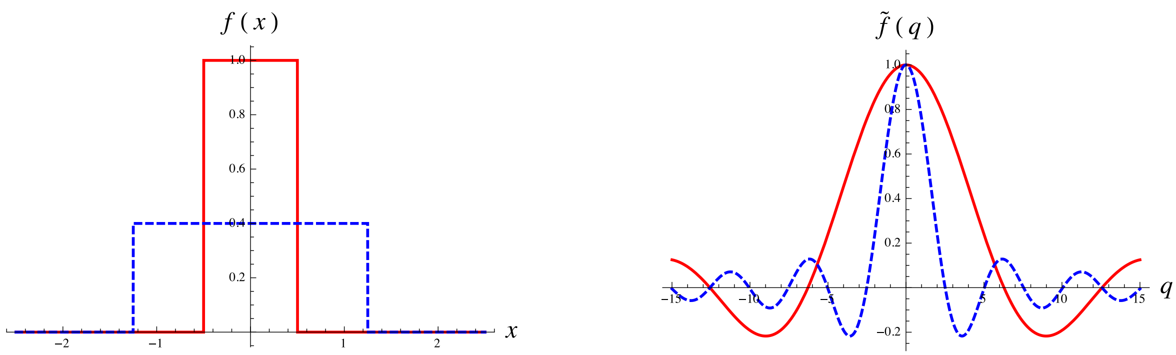
(i) *La série de sinus f_s a les propriétés suivantes : $f_s(0) = f_s(1) = 0$. Donc il faut choisir une fonction continue qui obéit à $f(0) = f(1) = 0$. Exemple : $f(x) = (x - 1/2)^2 - 1/4$.*

(ii) *La série de Fourier f_F a les propriétés suivantes : $f_F(0) = f_F(1)$. Donc il faut choisir une fonction continue qui obéit à $f(0) = f(1) \neq 0$. Exemple : $f(x) = (x - 1/2)^2$.*

---

b) *[2 points]* Les tracés ci-dessous montrent deux fonctions à gauche ainsi que leurs transformées de Fourier à droite. Indiquer quelle transformée de Fourier correspond à quelle fonction. (Recopier les tracés sur votre copie.)

Solution : Avec $\mathrm{TF}[f(x/a)] = |a|\tilde{f}(aq)$, *on identifie :*

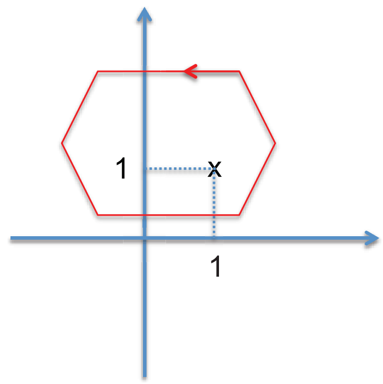


Plus large la fonction, plus étroite sa TF ; et vice versa.

---

c) *[4 points]* Donner un exemple d'une fonction qui est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ et qui possède un pôle en $z_0 = 1 + i$. Indiquer l'ordre de ce pôle. Montrer la position de la singularité dans le plan complexe et tracer un contour C tel que $\oint_C dz\ f(z) = 2\pi i$. (Si ce n'est pas possible pour la fonction que vous avez choisi, prendre une autre fonction.)

Solution : On choisit $f(z) = 1/(z - z_0)$. Il s'agit d'unpôle d'ordre 1. Dans ce cas, on trouve $\oint_C dz\ f(z) = 2\pi i$ pour un contour qui enferme z_0 dans le sens mathématique positif selon la formule intégrale de Cauchy.



Attention : Si on choisit une fonction de la forme $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ avec $g(z_0) \neq 0$ (pôle d'ordre m), il faut $g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)! = 1$ afin d'obtenir $\oint_C dz\, f(z) = 2\pi i$ pour un contour qui enferme z_0 dans le sens mathématique positif.

---

2. Séries de Fourier : Vibrations d'une poutre. *($\sum = 14$ points)*

L'équation différentielle décrivant les mouvements transversaux d'une poutre de longueur L prend la forme

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x,t) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = 0,$$

où la constante $K > 0$ dépend des propriétés intrinseques de la poutre. Ici $x \in [0, L]$ est la coordonnée spatiale le long de la poutre, y est son déplacement lateral et t est le temps. On utilise les conditions aux bords $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

a) *[1 points]* Quelle est la dimension de la constante K ?

Solution : La dimension de K est $[K]$=m^2/s.

---

b) *[2 points]* Quelle série (Fourier, sin, cos) est la plus adaptée pour traiter ce problème ? Pourquoi ?

Solution : La fonction obéit aux conditions de bord $y(0,t) = y(L,t) = 0$ et l'équation différentielle ne contient que des dérivées paires. Donc on choisit une série de sinus.

---

c) *[4 points]* Démontrer que les coéfficients $b_n(t)$ de la série de sinus de $y(x,t)$ obéissent aux équations

$$\left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 b_n(t) + \frac{1}{K^2} \ddot{b}_n(t) = 0.$$

Solution : La série de sinus de $y(x,t)$ est donnée par $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\pi n x/L)$. Donc

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\frac{\pi n x}{L} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\frac{\pi n x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 b_n(t) + \frac{1}{K^2} \ddot{b}_n(t) \right\} \sin\frac{\pi n x}{L} = 0.$$

Comme $\{sin(\pi n x/L)\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ forme une base, on en déduit

$$\left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 b_n(t) + \frac{1}{K^2} \ddot{b}_n(t) = 0.$$

---

d) *[3 points]* Déterminer les solutions générales pour les coéfficients $b_n(t)$.

Solution : L'équation différentielle peut être résolue avec $b_n(t) = \exp[i\omega_n t]$, si

$$\left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 b_n(t) - \frac{1}{K^2}\omega_n^2 = 0,$$

c'est-à-dire, $\omega_n = \pm K(\pi n/L)^2$. Donc la solution générale prend la forme

$$b_n(t) = A_n e^{iK(\pi n/L)^2 t} + B_n e^{-iK(\pi n/L)^2 t}.$$

Par la suite, nous considérons les conditions initiales spécifiques $y(x,0) = y_0(x)$ avec

$$y_0(x) = w\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L}\right)$$

et $dy(x,t)/dt|_{t=0} = 0$.

e) *[4 points]* Déterminer les constantes dans les solutions trouvées en d) en utilisant les conditions initiales.
Solution : La solution générale pour $y(x,t)$ prend la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{iK(\pi n/L)^2 t} + B_n e^{-iK(\pi n/L)^2 t}\right]\sin\frac{\pi n x}{L}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}[A_n + B_n]\sin\frac{\pi n x}{L} \\ \frac{d}{dt}y(x,t)\Big|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} iK(\pi n/L)^2\,[A_n - B_n]\sin\frac{\pi n x}{L} \end{aligned}$$

La condition initiale $dy(x,t)/dt|_{t=0} = 0$ impose $A_n = B_n$ et la condition initiale $y(x,0) = y_0(x)$ prend la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \sin\frac{\pi n x}{L} = w\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L}\right).$$

On remarque que le côté droit de l'équation correspond à une série de sinus avec les coéfficients $c_1 = c_3 = w$ et $c_n = 0$ pour tous les autres n. Par conséquent, $2A_1 = 2A_3 = w$ tandis que tous les autres A_n sont nuls.

Finalement on trouve le résultat (pas demandé dans l'énoncé)

$$y(x,t) = w\left\{\cos\left[K(\pi/L)^2 t\right]\sin\frac{\pi x}{L} + \cos\left[K(3\pi/L)^2 t\right]\sin\frac{3\pi x}{L}\right\}.$$

---

3. Transformées de Fourier : Mouvement Brownien *($\sum = 15$ points)*

On considère une particule de masse m soumise à une force de frottement fluide $f = -kv$, où v est la vitesse et $k > 0$ ainsi qu'une force aléatoire $\eta(t)$. L'équation du mouvement à une dimension prend donc la forme

$$m\frac{d}{dt}v(t) = -kv(t) + \eta(t).$$

On suppose que la force aléatoire est caractérisée par sa moyenne

$$\langle \eta(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, \eta(t) = 0$$

et ses corrélations

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \Gamma \delta(\tau).$$

a) *[2 points]* Trouver la dimension de la constante Γ.

Solution : Avec $[\eta] = \mathrm{kg\ m/s^2}$ *et* $[t] = \mathrm{s} \Rightarrow [\delta(t)] = \mathrm{s}^{-1}$, *on trouve*

$$[\Gamma] = \frac{\mathrm{kg}^2\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}.$$

---

b) *[2 points]* Déterminer la transformée de Fourier de l'équation du mouvement et donner une expression pour $\tilde{v}(\omega)$.

Solution : On trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}[m\frac{d}{dt}v(t)] &= \mathrm{TF}[-kv(t) + \eta(t)] \\ \Rightarrow \quad im\omega\tilde{v}(\omega) &= -k\tilde{v}(\omega + \tilde{\eta}(\omega) \end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{\tilde{\eta}(\omega)}{k + im\omega}.$$

---

c) *[3 points]* Donner une expression pour $\tilde{c}(\omega) = |\tilde{v}(\omega)|^2$ et sa transformée de Fourier inverse.

Solution : Avec le résultat de b), on obtient

$$\tilde{c} = \frac{|\tilde{\eta}(\omega)|^2}{k^2 + m^2\omega^2}.$$

En outre,

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, v(s)v(s+t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{|\tilde{\eta}(\omega)|^2}{k^2 + m^2\omega^2}\right] = \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{\mathrm{TF}\left[\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \eta(s)\eta(s+t)\right]}{k^2 + m^2\omega^2}\right].$$

Du résultat c) on peut conclure que

$$\mathrm{TF}\left[\langle v(t)v(t+\tau)\rangle\right] = \frac{\mathrm{TF}\left[\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle\right]}{k^2 + m^2\omega^2}.$$

d) *[2 points]* Calculer $\mathrm{TF}\left[\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle\right]$.

Solution : On trouve

$$\mathrm{TF}\left[\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle\right] = \Gamma\, \mathrm{TF}[\delta(\tau)] = \Gamma.$$

---

e) *[4 points]* Calculer les transformées de Fourier de $f_>(t) = H(t)e^{-at}$ et $f_<(t) = H(-t)e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

<u>*Solution*</u> *: On calcule*

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_>(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-i\omega t} H(t)e^{-at} = \int_{0}^{\infty} dt\; e^{-(a+i\omega)t} = \left[-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} \\
\tilde{f}_<(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-i\omega t} H(-t)e^{at} = \int_{-\infty}^{0} dt\; e^{(a-i\omega)t} = \left[\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-i\omega}
\end{aligned}$$

---

f) *[2 points]* Déterminer

$$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{\Gamma}{2mk}\left(\frac{1}{\frac{k}{m}+i\omega} + \frac{1}{\frac{k}{m}-i\omega}\right)\right].$$

<u>*Solution*</u> *: Avec le résultat de e), on obtient*

$$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \frac{\Gamma}{2mk}\left[H(\tau)e^{-(k/m)\tau} + H(-t)e^{(k/m)\tau}\right] = \frac{\Gamma}{2mk}e^{-(k/m)|\tau|}.$$

---

4. Analyse complexe

($\sum$ = 13 points)

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{(z-\pi)^5}.$$

a) *[2 points]* Déterminer le(s) point(s) singulier(s) de la fonction $f(z)$.

<u>*Solution*</u> *: Les fonctions e^z, $\sin z$ et $(z-\pi)^5$ sont analytiques sur tout $\mathbb{C}$. Le dénominateur de $f(z)$ s'annule en $z = z_0 = \pi$. Donc f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{\pi\}$ est possède une singularité en $z_0 = \pi$.*

---

b) *[3 points]* Déterminer la série de Taylor de $h(z) = e^{cz}$ pour $c \in \mathbb{C}$ autour du point $z_0 = \pi$.

<u>*Solution*</u> *: La fonction $h(z)$ est analytique sur tout $\mathbb{C}$. Donc elle peut être développée en série de Taylor autour de$z_0 = \pi$:*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} h^{(n)}(\pi)(z-\pi)^n.$$

Avec $h^{(n)}(z) = c^n e^{cz}$, on obtient

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c^n e^{c\pi}(z-\pi)^n.$$

---

c) *[2 points]* Déduire du résultat b) la série de Taylor de $\tilde{f}(z) = e^z \sin z$ autour du point $z_0 = \pi$. On appelera les coéfficients b_n.

<u>*Solution*</u> *: La fonction $\tilde{f}(z)$ peut être écrite sous la forme*

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right).$$

En utilisant le résultat de b), on obtient

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(1+i)^n e^{(1+i)\pi} - (1-i)^n e^{(1-i)\pi} \right] (z-\pi)^n.$$

Donc

$$b_n = \frac{1}{2i\ n!} \left[(1+i)^n e^{(1+i)\pi} - (1-i)^n e^{(1-i)\pi} \right] = -\frac{1}{2i\ n!} e^{\pi} \left[(1+i)^n - (1-i)^n \right].$$

On note $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ *et* $(1 \pm i)^4 = -4$.

---

d) *[2 points]* Donner la valeur n_0 tel que tous les coéfficents de la série de Taylor trouvée en c) avec $n < n_0$ sont nuls tandis $b_{n_0} \neq 0$.

<u>Solution</u> *: Avec c), on trouve*

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{1}{2i} e^{\pi} \left[1 - 1 \right] = 0, \\ b_1 &= -\frac{1}{2i} e^{\pi} \left[(1+i) - (1-i) \right] = -e^{\pi}. \end{aligned}$$

Donc $n_0 = 1$.

---

e) *[3 points]* Déterminer la série de Laurent de $f(z)$ autour du point $z_0 = \pi$. Exprimer les coéfficients a_n de cette séries en termes des coéfficients de la série de Taylor de $\tilde{f}(z)$.

<u>Solution</u> *: Avec* $f(z) = \tilde{f}(z)/(z-\pi)^5$*, on obtient*

$$f(z) = \frac{1}{(z-\pi)^5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-\pi)^n = \sum_{n=-4}^{\infty} b_{n+5} (z-\pi)^n,$$

où on a utilisé que $b_0 = 0$*. Donc*

$$a_n = b_{n+5} = -\frac{1}{(n+5)!} e^{\pi} \left[(1+i)^{n+5} - (1-i)^{n+5} \right].$$

En particulier, $a_{-4} = b_1 = -2ie^{\pi}$.

---

f) *[1 points]* Indiquer la nature de la singularité de $f(z)$ en $z_0 = \pi$. (S'il s'agit d'un pôle, donner son ordre.)

<u>Solution</u> *: On a trouvé que les coéfficients de la série de Laurent de* $f(z)$ *ont les propriétés suivantes :* $a_{-4} \neq 0$ *et* $a_n = 0$ *pour tous* $n < -4$*. Donc il s'agit d'un pôle d'ordre 4.*