Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 22 octobre 2015

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

— Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.

— Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.

— La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\,dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi nx/L} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{-2i\pi nx/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n\frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\pi n\frac{x}{L})\,dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n \frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\pi n\frac{x}{L})\,dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx}dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx}dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s)g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f^*(s)g(x+s)$$

Formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

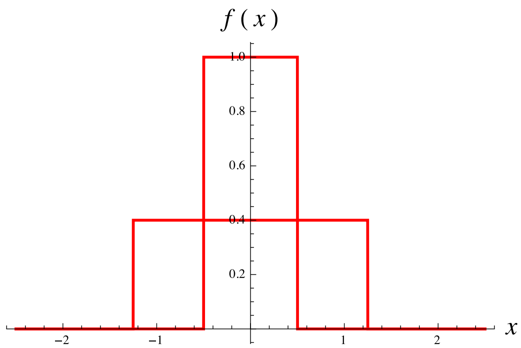
1. Quelques questions courtes (pas de calcul nécessaire). *(∼15%)*

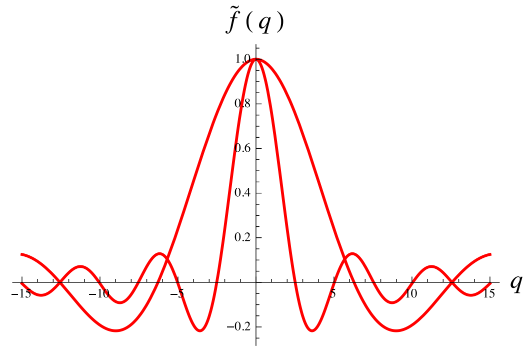
a) Donner un exemple d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

(i) La série de sinus f_s de la fonction converge vers la valeur de la fonction dans tous les points $x \in [0,1]$.

(ii) La série de Fourier f_F de la fonction converge vers la valeur de la fonction dans tous les points $x \in [0,1]$ tandis que ce n'est pas le cas pour sa série de sinus f_s.

b) Les tracés ci-dessous montrent deux fonctions à gauche ainsi que leurs transformées de Fourier à droite. Indiquer quelle transformée de Fourier correspond à quelle fonction. (Recopier les tracés sur votre copie.)





c) Donner un exemple d'une fonction qui est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{3\}$ et qui possède un pôle en $z_0 = 1 + i$. Indiquer l'ordre de ce pôle. Montrer la position de la singluarité dans le plan complexe et tracer un contour C tel que $\oint_C dz\ f(z) = 2\pi i$. (Si ce n'est pas possible pour la fonction que vous avez choisi, prendre une autre fonction.)

2. Séries de Fourier : Vibrations d'une poutre. *(∼30%)*

L'équation différentielle décrivant les mouvements transversaux d'une poutre de longueur L prend la forme

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x,t) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = 0,$$

où la constante $K > 0$ dépend des propriétés intrinseques de la poutre. Ici $x \in [0, L]$ est la coordonnée spatiale le long de la poutre, y est son déplacement lateral et t est le temps. On utilise les conditions aux bords $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

a) Quel est la dimension de la constante K ?

b) Quelle série (Fourier, sin, cos) est la plus adapté pour traiter ce problème ? Pourquoi ?

c) Démontrer que les coéfficients $b_n(t)$ de la série de sinus de $y(x,t)$ obéissent aux équations

$$\left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 b_n(t) + \frac{1}{K^2} \ddot{b}_n(t) = 0.$$

d) Déterminer les solutions générales pour les coéfficients $b_n(t)$.

Par la suite, nous considérons les conditions initiales spécifiques $y(x,0) = y_0(x)$ avec

$$y_0(x) = w\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L}\right)$$

et $dy(x,t)/dt|_{t=0} = 0$.

f) Déterminer les constantes dans les solutions trouvées en d) en utilisant les conditions initiales.

---

3. Transformées de Fourier : Mouvement Brownien *(~35%)*

On considère une particule de masse m soumise à une force de frottement fluide $f = -kv$, où v est la vitesse et $k > 0$ ainsi qu'une force aléatoire $\eta(t)$. L'équation du mouvement à une dimension prend donc la forme

$$m\frac{d}{dt}v(t) = -kv(t) + \eta(t).$$

On suppose que la force aléatoire est caractérisée par sa moyenne

$$\langle \eta(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, \eta(t) = 0$$

et ses corrélations

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \Gamma\delta(\tau).$$

a) Trouver la dimension de la constante Γ.

b) Déterminer la transformée de Fourier de l'équation du mouvement et donner une expression pour la variable $\tilde{v}(\omega)$.

c) Donner une expression pour $\tilde{c}(\omega) = |\tilde{v}(\omega)|^2$ et sa transformée de Fourier inverse.

Du résultat c) on peut conclure que

$$\mathrm{TF}\left[\langle v(t)v(t+\tau)\rangle\right] = \frac{\mathrm{TF}\left[\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle\right]}{k^2 + m^2\omega^2}.$$

d) Calculer $\mathrm{TF}\left[\langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle\right]$.

e) Calculer les transformées de Fourier de $f_>(t) = H(t)e^{-at}$ et $f_<(t) = H(-t)e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

f) Déterminer

$$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{\Gamma}{2mk}\left(\frac{1}{\frac{k}{m} + i\omega} + \frac{1}{\frac{k}{m} - i\omega}\right)\right].$$

---

4. Analyse complexe *(~25%)*

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{(z-\pi)^5}.$$

a) Déterminer les points singuliers de la fonction $f(z)$.

b) Déterminer la série de Taylor de $h(z) = e^{cz}$ pour $c \in \mathbb{C}$ autour du point $z_0 = \pi$.

c) Déduire du résultat b) la série de Taylor de $\tilde{f}(z) = e^z \sin z$ autour du point $z_0 = \pi$. On appelera les coéfficients b_n.

d) Donner la valeur n_0 tel que tous les coéfficents de la série de Taylor trouvée en c) avec $n < n_0$ sont nuls tandis $b_{n_0} \neq 0$.

e) Déterminer la série de Laurent de $f(z)$ autour du point $z_0 = \pi$. Exprimer les coéfficients a_n de cette séries en termes des coéfficients de la série de Taylor de $\tilde{f}(z)$.

f) Indiquer la nature de la singularité de $f(z)$ en $z_0 = \pi$. (S'il s'agit d'un pôle, donner son ordre.)