Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen Final – 5 janvier 2015 (CORRIGÉ)

1. Quelques questions courtes. *($\sum$ = 15 points)*

a) *[3 points]* On considère la fonction

$$f(x) = \sin(5\pi x) - \cos(8\pi x).$$

— Donner la période L de cette fonction.
— Donner les coefficients de la série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, L]$.

Solution : On trouve

$$f(x+L) = \sin(5\pi x)\cos(5\pi L) + \cos(5\pi x)\sin(5\pi L) - \cos(8\pi x)\cos(8\pi L) + \sin(8\pi x)\sin(8\pi L).$$

Donc $f(x+L) = f(x)$ *pour*

$$5\pi L = 2\pi n \text{ et } 8\pi L = 2\pi m \text{ avec } n, m \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire, $L = \frac{2}{5}n = \frac{1}{4}m$*. Le plus petits entiers naturels qui permettent d'obtenir cette egalité sont* $n = 5$ *et* $m = 8$*. Par conséquent,* $L = 2$*.*

La série de Fourier est donnée par

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\right] = -\cos(2\pi \times 8 \times \frac{x}{2}) + \sin(2\pi \times 5 \times \frac{x}{2}).$$

Donc $a_8 = -1$ *et* $b_5 = 1$ *tandis que tous les autres coefficients sont nuls.*

---

b) *[3 points]* Donner la partie imaginaire des fonctions suivantes :

(i) $f_1(z) = e^{ix}$
(ii) $f_2(z) = z^* z$
(iii) $f_3(z) = \frac{1}{z}$

avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution :

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ f_2(z) &= (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 \\ f_3(z) &= \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Donc $\Im[f_1(z)] = \sin x$, $\Im[f_2(z)] = 0$ *et* $\Im[f_3(z)] = -y/(x^2+y^2)$.

---

c) *[2 points]* Donner des exemples :

(i) deux opérateurs linéaires qui commutent.
(ii) deux opérateurs linéaires qui ne commutent pas.

Solution :

(i) X *et* X^2

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) X *et* D

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

d) *[1 points]* On considère une particule soumise à une force $F(x) = A\delta(t)$ où t est le temps. Trouver la dimension de la constante A.

Solution : Avec $[F] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$ *et* $[\delta(t)] = 1/\mathrm{s}$, *on trouve* $[A] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$.

---

2. Formule de sommation de Poisson. *($\sum = 15$ points)*

Nous allons démontrer la formule de sommation de Poisson,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{1}$$

avec $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$.

a) *[1 points]* On définit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT).$$

Démontrer que $\phi(t)$ est T-périodique.

Solution :

$$\phi(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+T+nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+(n+1)T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t+mT) = \phi(t).$$

---

b) *[1 points]* Donner la série de Fourier complexe $\phi_F(t)$ de $\phi(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, T]$.

Solution :

$$\phi_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{2i\pi k \frac{t}{T}} \qquad \text{avec} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) \, e^{-2i\pi k \frac{t}{T}} \, dt.$$

---

c) *[3 points]* Démontrer que les coefficients c_k de la série de Fourier complexe sont donnés par

$$c_k = \frac{1}{T} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$

[Vous avez le droit de changer l'ordre de la somme et de l'intégrale.]

Solution :

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)\, e^{-2i\pi k \frac{t}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^T f(t+nT)\, e^{-2i\pi k \frac{t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-2i\pi k \frac{t-nT}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-2i\pi k \frac{t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2i\pi k \frac{t}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).
\end{aligned}$$

---

d) *[2 points]* Utiliser $\phi(0) = \phi_F(0)$ pour démontrer la formule de sommation de Poisson (1).

Solution :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \phi(0) = \phi_F(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$

Application : calcul de la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

e) *[5 points]* Déterminer la TF de $f(t) = 1/(1+t^2)$ en utilisant l'analyse complexe. Détailler bien tous les étapes : choix du contour, détermination des singularités et calcul des résidus ! Tracer le(s) contour(s) choisi(s) et indiquer la position des singularités.

Solution : La TF est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{1+t^2} e^{-i\omega t}.$$

La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples à $z_+ = i$ et $z_- = -i$. En outre, elle tend vers zéro pour $|z| \to \infty$. Donc le lemme de Jordan s'applique. Pour $-\omega > 0$ le contour doit être fermé dans le plan complexe supérieur tandis que pour $-\omega < 0$ le contour doit être fermé dans le plan complexe inférieur. Donc

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \theta(-\omega)\oint_{C_+} dz \frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z} + \theta(\omega)\oint_{C_-} dz \frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z} \\
&= \theta(-\omega) 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z}; i\right] - \theta(\omega) 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2} e^{-i\omega z}; -i\right] \\
&= \theta(-\omega) 2\pi i \frac{1}{2i} e^{\omega} - \theta(\omega) 2\pi i \frac{1}{-2i} e^{-\omega} = \theta(-\omega)\pi e^{-|\omega|} + \theta(\omega)\pi e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}.
\end{aligned}$$

---

f) *[1 points]* Utiliser la formule de sommation de Poisson (1) pour exprimer la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\tilde{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

Solution : Avec $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, on a $T = 1$ et, par conséquent, la formule de sommation de Poisson donne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi k) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|k|}.$$

---

g) *[2 points]* Evaluer la somme en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

<u>Solution</u> : Finalement,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} &= \pi \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-2\pi|k|} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi|k|} \right) = \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi k} \right) \\ &= \pi \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi}\right)^k - 1 \right) = \pi \left(2 \frac{1}{1-e^{-2\pi}} - 1 \right) = \pi \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \pi \coth \pi .\end{aligned}$$

---

3. Equations de compétition de Lotka-Volterra. *($\sum = 21$ points)*

Soient deux populations en compétition suivant la dynamique

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{1}{K} N\right) - \beta P N, \tag{2}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\delta P + \gamma N P. \tag{3}$$

Ici tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K \geq 0$.

a) *[2 points]* Trouver les solutions stationnaires avec $P_0 = 0$.

<u>Solution</u> : Pour $P_0 = 0$, on a $dP/dt = 0$ indépendamment de la valeur de N. Pour obtenir aussi $dN/dt = 0$, il faut $N(1 - N/K) = 0$. Donc $N_0 = 0$ ou $N_0 = K$.

On considère d'abord le cas $\beta = \gamma = 0$ tel que les deux équations sont découplées. Pour les exercices suivants [b)-e)], utiliser l'équation (2) seulement.

b) *[4 points]* Faire un calcul perturbatif pour déterminer la stabilité des solutions stationnaires trouvées en a).

<u>Solution</u> : On pose $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$. Donc

$$\frac{d(N_0 + \epsilon N_1)}{dt} = \alpha (N_0 + \epsilon N_1) \left[1 - \frac{N_0 + \epsilon N_1}{K}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \alpha \left[N_0 \left(-\frac{N_1}{K}\right) + N_1 \left(1 - \frac{N_0}{K}\right)\right] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{2N_0}{K}\right) N_1 .\end{aligned}$$

— $N_0 = 0$

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha N_1 \quad \Rightarrow \quad N_1(t) = N_1(0) e^{\alpha t}$$

Donc ce point est instable.

— $N_0 = K$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha N_1 \quad \Rightarrow \quad N_1(t) = N_1(0) e^{-\alpha t}$$

Donc ce point est stable.

---

c) *[2 points]* Est-ce que la population $N(t)$ augmente ou décroît avec le temps pour les conditions initiales suivantes ?

(i) $N(0) = K - \kappa$

(ii) $N(0) = K + \kappa$
avec $0 < \kappa < K$.

<u>Solution</u> *: Dans les deux cas, la population se rapproche de la solution stationnaire stable, $N_0 = K$. Donc pour $N(0) = K - \kappa < N_0$ la population augmente tandis que pour $N(0) = K + \kappa > N_0$ la population décroît.*

---

d) *[3 points]* Pour $\beta = 0$, l'équation (2) permet une solution exacte. Déterminer $N(t)$ en utilisant la méthode de la séparation des variables. Dénoter la condition initiale $N(0) = \bar{N}$.

<u>Solution</u> *: L'équation* (2) *peut être écrite sous la forme*

$$\frac{dN}{N(K-N)} = -\frac{1}{K}\left(\frac{1}{N-K} - \frac{1}{N}\right) dN = \frac{\alpha}{K} dt.$$

Donc

$$\int_{\bar{N}}^{N(t)} \left(\frac{1}{N-K} - \frac{1}{N}\right) dN = \ln \frac{(N(t)-K)\bar{N}}{(\bar{N}-K)N(t)} = -\int_0^t \alpha\, dt = -\alpha t.$$

On obtient

$$(N(t)-K)\bar{N} = (\bar{N}-K)N(t)e^{-\alpha t} \qquad \Rightarrow \qquad N(t) = \bar{N}\frac{Ke^{\alpha t}}{K + \bar{N}(e^{\alpha t} - 1)}.$$

---

e) *[1 points]* Analyser le comportement de $N(t)$ dans la limite $t \to \infty$.

<u>Solution</u> *: Pour $t \to \infty$, on obtient $N(t) \to K$, c'est-à-dire, la solution stationnaire stable.*

Maintenant on considère le cas général $\beta, \gamma \neq 0$ où les équations (2) et (3) sont couplées.

f) *[2 points]* Est-ce qu'il y a des solutions stationnaires $N_0, P_0 \neq 0$? Trouver les solutions stationnaires et spécifier les conditions.

<u>Solution</u> *:*

$$0 = \alpha\left(1 - \frac{1}{K}N\right) - \beta P \text{ et } 0 = -\delta + \gamma N.$$

donne

$$N_0 = \frac{\delta}{\gamma},\ \ P_0 = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\delta}{K\gamma}\right).$$

Pour obtenir $P_0 > 0$, il faut imposer $K > \delta/\gamma$. (Le cas traité en TD correspond à $K \to \infty$.)

---

g) *[4 points]* Déterminer les équations différentielles perturbatives autour du point $N_0 = \delta/\gamma, P_0 = [1 - \delta/(K\gamma)]\alpha/\beta$. Ecrire les équations pour N_1, P_1 sous la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice 2×2.

Solution : On pose $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$ et $P(t) = P_0 + \epsilon P_1(t)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d(N_0+\epsilon N_1)}{dt} &= \alpha(N_0+\epsilon N_1)\left[1-\frac{N_0+\epsilon N_1}{K}\right] - \beta(P_0+\epsilon P_1)(N_0+\epsilon N_1) \\
\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} &= \alpha\left(1-\frac{2N_0}{K}\right)N_1 - \beta(P_0N_1+P_1N_0) = \left[\alpha\left(1-\frac{2N_0}{K}\right)-\beta P_0\right]N_1 - \beta N_0 P_1 \\
\frac{d(P_0+\epsilon P_1)}{dt} &= -\delta(P_0+\epsilon P_1) + \gamma(N_0+\epsilon N_1)(P_0+\epsilon P_1) \\
\Rightarrow \frac{dP_1}{dt} &= -\delta P_1 + \gamma(N_0P_1+N_1P_0) = \gamma P_0 N_1 + (-\delta+\gamma N_0)\,P_1
\end{aligned}$$

Donc la matrice $\mathbf{M}$ *prend la forme*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha\left(1-\frac{2N_0}{K}\right)-\beta P_0 & -\beta N_0 \\ \gamma P_0 & -\delta+\gamma N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\delta}{K\gamma} & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta}\left(1-\frac{\delta}{K\gamma}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

---

h) *[3 points]* Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{M}$. Est-ce que le point N_0, P_0 est stable ?

Solution : Les valeurs propres sont déterminées par l'équation

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0.$$

Donc

$$\left[-\frac{\alpha\delta}{K\gamma}-\lambda\right][-\lambda] - \left[\frac{\alpha\gamma}{\beta}\left(1-\frac{\delta}{K\gamma}\right)\right]\left[-\frac{\beta\delta}{\gamma}\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_\pm = -\frac{\alpha\delta}{2K\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\delta}{2K\gamma}\right)^2 - \alpha\delta\left(1-\frac{\delta}{K\gamma}\right)}.$$

Comme $K > \delta/\gamma$, on trouve $\Re[\lambda_\pm] < 0$. Donc le point stationnaire N_0, P_0 est stable.

---

4. Polynômes d'Hermite. *($\sum = 18$ points)*

Les polynômes d'Hermite H_n sont des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire

$$(g,f)_G = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} g(x) f(x). \tag{4}$$

a) *[4 points]* On considère l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}D^2 + XD$$

avec $X[f(x)] = xf(x)$ et $D[f(x)] = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$. Est-ce que $\mathcal{L}$ est hermitien par rapport au produit scalaire (4) ?

Solution : On cherche l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^\dagger$.

$$\begin{aligned}
(g, \mathcal{L}f)_G &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} g(x) \left[-\frac{1}{2} f''(x) + x f'(x)\right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} g(x)\right) f'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} g(x) x f'(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(-2xe^{-x^2} g(x) + e^{-x^2} g'(x)\right) f'(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} g(x) x f'(x) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} g'(x)\right) f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(-2xe^{-x^2} g'(x) + e^{-x^2} g''(x)\right) f(x) \\
&= \left(\left[-\frac{1}{2} D^2 + XD\right] g, f\right)_G = (\mathcal{L}^\dagger g, f)_G.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}^\dagger = -\frac{1}{2} D^2 + XD = \mathcal{L}$. C'est-à-dire $\mathcal{L}$ est hermitien.

---

b) *[3 points]* On suppose que h_n est une fonction propre de $\mathcal{L}$ avec valeur propre $\lambda_n = n$,

$$\mathcal{L} h_n = n h_n,$$

où $n > 0$.

Démontrer que $h_{n-1} = \frac{1}{2n} h_n'$ est aussi une fonction propre de $\mathcal{L}$. Trouver la valeur propre correspondante.

Solution :

$$\mathcal{L} h_{n-1} = \frac{1}{2n} \left[-\frac{1}{2} D^2 + XD\right] D h_n.$$

On utilise $[D, X] = 1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} h_{n-1} &= \frac{1}{2n} \left[-\frac{1}{2} D^2 + DX - 1\right] D h_n = \frac{1}{2n} D \left(\mathcal{L} - 1\right) h_n \\
&= \frac{1}{2n} D(n-1) h_n = (n-1) h_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc h_{n-1} est fonction propre avec la valeur propre $\lambda_{n-1} = n - 1$.

---

c) *[2 points]* Utiliser b) pour trouver une relation de réccurrence entre h_{n+1}, h_n et h_{n-1} à partir de l'équation $\mathcal{L} h_n = n h_n$.

Solution :

$$\mathcal{L} h_n = -\frac{1}{2} h_n'' + x h_n' = -n h_{n-1}' + 2nx h_{n-1} = -2n(n-1) h_{n-2} + 2nx h_{n-1} = n h_n$$

ou

$$h_{n+1} = 2x h_n - 2n h_{n-1}.$$

---

d) *[3 points]* L'équation $h_{n+1}(x) = 2xh_n(x) - 2nh_{n-1}(x)$ permet de trouver tous les fonctions propres de $\mathcal{L}$ si on connait $h_0(x)$ et $h_1(x)$. Démontrer que $h_1(x) = 2x$ est une fonction propre de $\mathcal{L}$ avec la valeur propre $\lambda_1 = 1$. Trouver $h_0(x)$.

<u>Solution</u> : On trouve

$$\mathcal{L}h_1(x) = \left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}\right](2x) = 2x = h_1(x).$$

Donc $h_1(x) = 2x$ est une fonction propre de $\mathcal{L}$ avec la valeur propre $\lambda_1 = 1$. En outre, $h_0(x) = h_1'(x)/2 = 1$.

---

e) *[2 points]* Quelle est la relation entre les polynômes d'Hermite H_n et les fonctions propres h_n ? Justifier.

<u>Solution</u> : Les fonctions propres h_n de $\mathcal{L}$ sont des polynômes de degré n. Comme $\mathcal{L}$ est hermitien, elles sont orthogonales. Donc elles correspondent aux polynômes d'Hermite.

---

f) *[1 points]* Démontrer que les fonctions $\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x)$ sont orthogonales par rapport au produit scalaire habituel, $(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)f(x)$.

<u>Solution</u> : On trouve

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} h_n(x)h_m(x) = (h_n, h_m)_G.$$

Donc $(h_n, h_m)_G = 0$ pour $n \neq m$ implique $(\psi_n, \psi_m) = 0$ pour $n \neq m$.

---

g) *[3 points]* Démontrer que les ψ_n sont des fonctions propres de l'oscillateur harmonique

$$\mathcal{H} = -D^2 + X^2.$$

Trouver les valeurs propres E_n correspondantes.

<u>Solution</u> :

$$\begin{aligned}
[-D^2 + X^2]\psi_n(x) &= \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right]\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x)\right) \\
&= -\frac{d}{dx}\left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n'(x)\right) + x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) + xe^{-\frac{1}{2}x^2}h_n'(x) + xe^{-\frac{1}{2}x^2}h_n'(x) - e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n''(x) \\
&\quad + x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(h_n(x) + 2xh_n'(x) - h_n''(x)\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(1 + 2\mathcal{L}\right)h_n(x) \\
&= (2n+1)e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(x) = (2n+1)\psi_n(x).
\end{aligned}$$

Donc ψ_n est une fonction propre de l'oscillateur harmonique avec la valeur propre $E_n = 2n + 1$.