Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen Final – 15 janvier 2015

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

— Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.

— Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.

— La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n x/L} \qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{-2i\pi n x/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n \frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s) g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f^*(s) g(x+s)$$

Formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad\qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

Commutateur :

$$[A, B] = AB - BA$$

Opérateur adjoint :

$$(g, \mathcal{L} f) = (\mathcal{L}^\dagger g, f)$$

---

1. Quelques questions courtes. *(∼ 15%)*

a) On considère la fonction

$$f(x) = \sin(5\pi x) - \cos(8\pi x).$$

- Donner la période L de cette fonction.
- Donner les coefficients de la série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, L]$.

b) Donner la partie imaginaire des fonctions suivantes :

(i) $f_1(z) = e^{ix}$

(ii) $f_2(z) = z^* z$

(iii) $f_3(z) = \frac{1}{z}$

avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Donner des exemples :

(i) deux opérateurs linéaires qui commutent.

(ii) deux opérateurs linéaires qui ne commutent pas.

d) On considère une particule soumise à une force $F(x) = A\delta(t)$ où t est le temps. Trouver la dimension de la constante A.

---

2. Formule de sommation de Poisson. *(∼ 27%)*

Nous allons démontrer la formule de sommation de Poisson,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{1}$$

avec $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$.

a) On définit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT).$$

Démontrer que $\phi(t)$ est T-périodique.

b) Donner la série de Fourier complexe $\phi_F(t)$ de $\phi(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, T]$.

c) Démontrer que les coéfficients c_k de la série de Fourier complexe sont donnés par

$$c_k = \frac{1}{T} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$

[Vous avez le droit de changer l'ordre de la somme et de l'intégrale.]

d) Utiliser $\phi(0) = \phi_F(0)$ pour démontrer la formule de sommation de Poisson (1).

Application : calcul de la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

e) Déterminer la TF de $f(t) = 1/(1+t^2)$ en utilisant l'analyse complexe. Détailler bien tous les étapes : choix du contour, détermination des singularités et calcul des résidus ! Tracer le(s) contour(s) choisi(s) et indiquer la position des singularités.

f) Utiliser la formule de sommation de Poisson (1) pour exprimer la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\tilde{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

g) Evaluer la somme en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

---

3. Equations de compétition de Lotka-Volterra. *($\sim 30\%$)*

Soient deux populations en compétition suivant la dynamique

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{1}{K} N\right) - \beta P N, \tag{2}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\delta P + \gamma N P. \tag{3}$$

Ici tous les coéfficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K \geq 0$.

a) Trouver les solutions stationnaires avec $P_0 = 0$.

On considère d'abord le cas $\beta = \gamma = 0$ tel que les deux équations sont découplées. Pour les exercices suivantes [b)-e)], utiliser l'équation (2) seulement.

b) Faire un calcul perturbatif pour déterminer la stabilité des solutions stationnaires trouvées en a).

c) Est-ce que la population $N(t)$ augmente ou décroît avec le temps pour les conditions initiales suivantes ?

(i) $N(0) = K - \kappa$

(ii) $N(0) = K + \kappa$

avec $0 < \kappa < K$.

d) Pour $\beta = 0$, l'équation (2) permet une solution exacte. Déterminer $N(t)$ en utilisant la méthode de la séparation des variables. Dénoter la condition initiale $N(0) = \bar{N}$.

e) Analyser le comportement de $N(t)$ dans la limite $t \to \infty$.

Maintenant on considère le cas général $\beta, \gamma \neq 0$ où les équations (2) et (3) sont couplées.

f) Est-ce qu'il y a des solutions stationnaires $N_0, P_0 \neq 0$? Trouver les solutions stationnaires et spécifier les conditions.

g) Déterminer les équations différentielles perturbatives autour du point $N_0 = \delta/\gamma, P_0 = [1-\delta/(K\gamma)]\alpha/\beta$. Ecrire les équations pour N_1, P_1 sous la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice 2×2.

h) Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{M}$. Est-ce que le point N_0, P_0 est stable ?

4. Polynômes d'Hermite. *(∼ 28%)*

Les polynômes d'Hermite H_n sont des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire

$$(g, f)_G = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} g(x) f(x). \tag{4}$$

a) On considère l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} D^2 + XD$$

avec $X[f(x)] = xf(x)$ et $D[f(x)] = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$. Est-ce que $\mathcal{L}$ est hermitien par rapport au produit scalaire (4) ?

b) On suppose que h_n est une fonction propre de $\mathcal{L}$ avec valeur propre $\lambda_n = n$,

$$\mathcal{L} h_n = n h_n,$$

où $n > 0$.

Démontrer que $h_{n-1} = \frac{1}{2n} h_n'$ est aussi une fonction propre de $\mathcal{L}$. Trouver la valeur propre correspondante.

c) Utiliser b) pour trouver une relation de réccurrence entre h_{n+1}, h_n et h_{n-1} à partir de l'équation $\mathcal{L} h_n = n h_n$.

d) L'équation $h_{n+1}(x) = 2x h_n(x) - 2n h_{n-1}(x)$ permet de trouver tous les fonctions propres de $\mathcal{L}$ si on connait $h_0(x)$ et $h_1(x)$. Démontrer que $h_1(x) = 2x$ est une fonction propre de $\mathcal{L}$ avec la valeur propre $\lambda_1 = 1$. Trouver $h_0(x)$.

e) Quelle est la relation entre les polynômes d'Hermite H_n et les fonctions propres h_n ? Justifier.

f) Démontrer que les fonctions $\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} h_n(x)$ sont orthogonales par rapport au produit scalaire habituel, $(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) f(x)$.

g) Démontrer que les ψ_n sont des fonctions propres de l'oscillateur harmonique

$$\mathcal{H} = -D^2 + X^2.$$

Trouver les valeurs propres E_n correspondantes.