Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 10 novembre 2014 (CORRIGÉ)

1. Quelques questions courtes (pas de calcul nécessaire). *($\sum$ = 7 points)*

a)) *[3 points]* On considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : [0,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^4 \end{aligned}$$

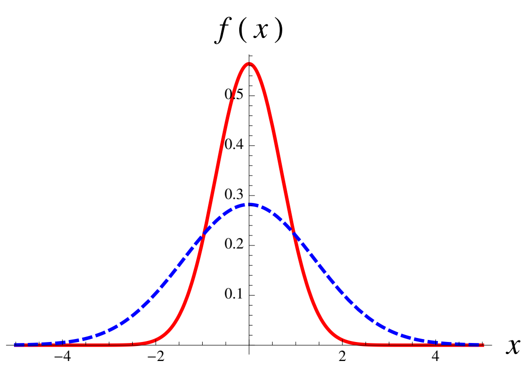
Trouver laquelle des séries de Fourier, sinus ou cosinus donne les bonnes valeurs de $f(x)$ aux bords, c'est-à-dire en $x=0$ et en $x=2$. Tracer la fonction périodique définie par la série que vous avez choisie sur l'intervalle $\mathcal{I} = [-2, 4]$.

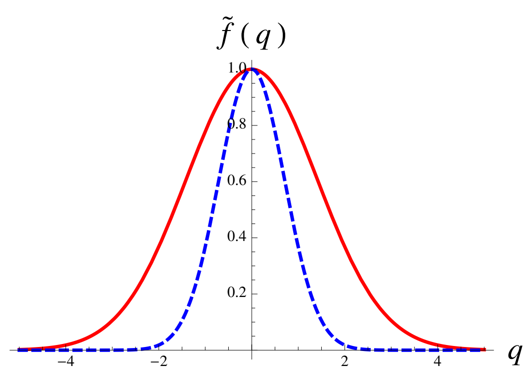
Solution : *Seule la série de cosinus permet d'obtenir $f_c(0) \neq f_c(2)$. Comme la fonction périodique définie par la série de cosinus est continue en $x=0$ et en $x=2$, elle donne les bonnes valeurs $f_c(0) = f(0)$ et $f_c(2) = f(2)$.*

---

b) *[2 points]* Les tracés ci-dessous montrent deux fonctions à gauche ainsi que leurs transformées de Fourier à droite. Indiquer quelle transformée de Fourier correspond à quelle fonction. (Recopier les tracés sur votre copie.)

Solution : *Une variation plus lente de la fonction correspond à une variation plus rapide de la transformée de Fourier et vice versa.*





Il s'agit de deux Gaussiennes :

$$f_a(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \qquad \tilde{f}_a(q) = e^{-\left(\frac{aq}{2}\right)^2}.$$

Les courbes rouges solides correspondent à $a=1$ tandis que les courbes bleues pointillées correspondent à $a=2$.

---

c) *[2 points]* Donner un exemple d'une fonction qui est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{3\}$ et qui possède un pôle en $z_0 = 3$. Indiquer l'ordre de ce pôle.

Solution : *Quelques choix possibles :*

– $f(z) = \frac{1}{(z-3)^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}_+$ *: pôle d'ordre* n
– $f(z) = \frac{a\cos z + b \sin z}{(z-3)^n}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}_+$ *: pôle d'ordre* n

---

2. Equation de la chaleur : Transformées de Fourier et analyse complexe. *($\sum$ = 21 points)*

On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + Q_0 f(t) \delta(x),$$

où $D, Q_0 \in \mathbb{R}_+$ et $f(t)$ sera spécifiée plus tard.

a) *[1 point]* Trouver une équation pour $\tilde{u}(q,t) = \mathrm{TF}_x[u(x,t)]$.

Solution :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(q,t) = -Dq^2 \tilde{u}(q,t) + Q_0 f(t)$$

---

b) *[1 point]* Trouver une équation pour $U(q,\omega) = \mathrm{TF}_t[\tilde{u}(q,t)]$ en fonction de $F(\omega) = \mathrm{TF}[f(t)]$.

Solution :

$$i\omega U(q,\omega) = -Dq^2 U(q,\omega) + Q_0 F(\omega)$$

On va d'abord résoudre le cas $f(t) = \delta(t - t_0)$.

c) *[1 point]* Calculer $F(\omega)$.

Solution :

$$F(\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{-i\omega t} \delta(t - t_0) = e^{-i\omega t_0}$$

Pour trouver $u(x,t)$, il faudra prendre les transformées de Fourier inverses par rapport à q et ω de

$$U(q,\omega) = \frac{Q_0 e^{-i\omega t_0}}{Dq^2 + i\omega}.$$

d) *[9 points]* On commencera par la TF inverse par rapport à ω. Utiliser l'analyse complexe pour trouver $\tilde{u}(q,t)$. Détailler bien tous les étapes : choix du contour, détermination des singularités et calcul des résidus ! Tracer le(s) contour(s) choisi(s) et indiquer la position des singularités.

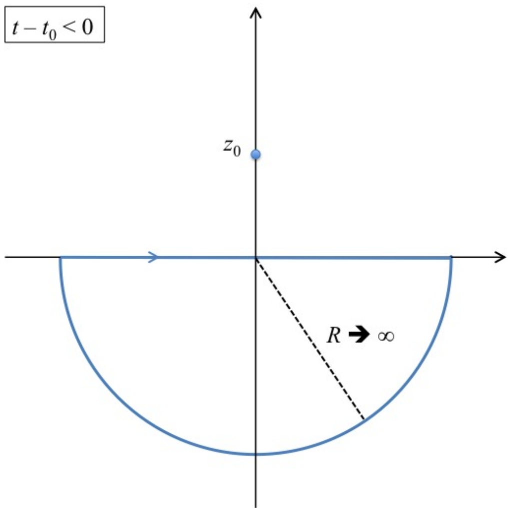
Solution : La TF inverse de $U(q,\omega)$ par rapport à ω est donnée par

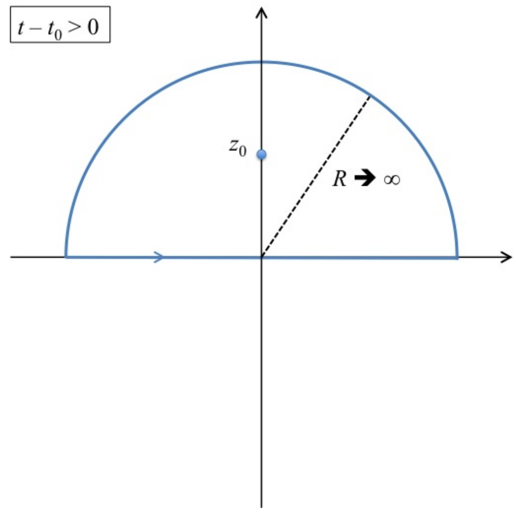
$$\tilde{u}(q,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; e^{i\omega t} \frac{Q_0 e^{-i\omega t_0}}{Dq^2 + i\omega} = \frac{Q_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \; e^{i(t-t_0)z} f(z)$$

avec $f(z) = 1/(z - iDq^2)$.

La fonction $f(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, où $z_0 = iDq^2$, et tend vers zéro dans la limite $|z| \to 0$. Donc le lemme de Jordan s'applique. Il faut distinguer les cas $t - t_0 < 0$ et $t - t_0 > 0$.

- $t - t_0 < 0$
  Dans ce cas, on peut fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$ dans le plan complexe inférieur ($\Im[z] < 0$). Comme $\Im[z_0] > 0$, l'intégrant est analytique dans tout le plan complexe inférieur. Donc le théorème de Cauchy s'applique et on trouve que l'intégrale est nulle.
- $t - t_0 > 0$
  Dans ce cas, on peut fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$ dans le plan complexe supérieur ($\Im[z] > 0$). Dans ce cas, la singularité de l'intégrant en $z = z_0$ est enfermé par le contour (dans le sens mathématique positif). Donc la valeur de l'intégrale peut être déterminée en utilisant le calcul des résidus.





On obtient

$$\tilde{u}(q,t) = \frac{Q_0}{2\pi i} H(t-t_0) \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}[e^{i(t-t_0)z} f(z); z_0] \right\}.$$

En $z = z_0$, l'intégrant possède un pôle d'ordre 1, c'est-à-dire,

$$g(z) = (z - z_0) e^{i(t-t_0)z} f(z) = e^{i(t-t_0)z}$$

est analytique et le résidu est donné par

$$\operatorname{Res}[e^{i(t-t_0)z} f(z); z_0] = g(z_0) = e^{-Dq^2(t-t_0)}.$$

Donc on trouve

$$\tilde{u}(q,t) = Q_0 e^{-Dq^2(t-t_0)} H(t-t_0).$$

---

e) *[4 points]* La prochaine étape sera de prendre la TF inverse par rapport à q de

$$\tilde{u}(q,t) = Q_0 e^{-Dq^2(t-t_0)} H(t-t_0),$$

où $H(t)$ est la fonction Heaviside. Trouver $u(x,t)$. Rappel : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

<u>Solution</u> *: La TF inverse de $\tilde{u}(q,t)$ par rapport à q est donnée par*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{iqx} Q_0 e^{-Dq^2(t-t_0)} H(t-t_0).$$

On commence par compléter le carré,

$$\begin{aligned} -Dq^2(t-t_0) + iqx &= -D(t-t_0) \left[q^2 - 2i \frac{x}{2D(t-t_0)} q - \frac{x^2}{4(D(t-t_0))^2} + \frac{x^2}{4(D(t-t_0))^2} \right] \\ &= -D(t-t_0) \left(q - i \frac{x}{2D(t-t_0)} \right)^2 - \frac{x^2}{4D(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Donc

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{2\pi} H(t-t_0) e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{-D(t-t_0)\left(q - i\frac{x}{2D(t-t_0)}\right)^2}.$$

Maintenant on peut faire un changement de variable

$$q \to z = \sqrt{2D(t-t_0)}\left(q - i\frac{x}{2D(t-t_0)}\right).$$

On obtient

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{2\pi} H(t-t_0) e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}} \frac{1}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\; e^{-\frac{z^2}{2}},$$

où on a utilisé $\int_{-\infty+z_0}^{\infty+z_0} dz\; e^{-z^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz\; e^{-z^2/2}$*. Finalement,*

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{2\pi} H(t-t_0) e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}} \frac{1}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \sqrt{2\pi} = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} H(t-t_0) e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}}.$$

On passera maintenant au cas $f(t)$ arbitraire.

f) *[3 points]* Démontrer que la solution s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\; u_0(x,s) f(t-s),$$

où $u_0(x,t) = Q_0/(2\sqrt{\pi D t}) e^{-x^2/(4Dt)} H(t)$ est la solution de l'équation de la chaleur pour $f(t) = \delta(t)$, déterminée en e).

Solution : On a

$$U(q,\omega) = \frac{Q_0 F(\omega)}{Dq^2 + i\omega} = U_0(q,\omega) F(\omega).$$

Avec $\mathrm{TF}^{-1}[\tilde{g}(\omega)\cdot\tilde{h}(\omega)] = (g*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; g(s)h(t-s)$*, on obtient*

$$\tilde{u}(q,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\; \tilde{u}_0(q,s) f(t-s).$$

La TF inverse par rapport à q donne

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\; u_0(x,s) f(t-s).$$

---

g) *[2 points]* Donner $u(x,t)$ pour $f(t) = A\,\delta(t+T_a) - B\,\delta(t-T_b)$.

Solution : La formule pour $u(x,t)$ en f) donne

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\; \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi D s}} e^{-\frac{x^2}{4Ds}} H(s) \left\{A\,\delta(t-s+T_a) - B\,\delta(t-s-T_b)\right\} \\ &= A\frac{Q_0}{2\sqrt{\pi D(t+T_a)}} e^{-\frac{x^2}{4D(t+T_a)}} H(t+T_a) - B\frac{Q_0}{2\sqrt{\pi D(t-T_b)}} e^{-\frac{x^2}{4D(t-T_b)}} H(t-T_b). \end{aligned}$$

3. Mouvement Brownien : Séries de Fourier. *($\sum = 15$ points)*

On considère une particule sur un réseau discret unidimensionnel de pas d. La particule a une probabilité α par unité de temps de sauter soit à droite, soit à gauche. On cherche à déterminer la probabilité $P(n,t)$ que la particule se trouve sur le site n au temps t. La probabilité $P(n,t)$ obéit à l'équation maîtresse

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = \alpha \left[P(n+1,t) + P(n-1,t) - 2P(n,t)\right]. \tag{1}$$

On choisit les conditions initiales $P(0,0) = 1$ et $P(n \neq 0, 0) = 0$.

Pour résoudre le système d'équations différentielles couplées, on utilisera la méthode de la fonction génératrice. Pour cela, on supposera que les probabilités $P(n,t)$ sont les coefficients de la série de Fourier complexe de la fonction $\phi(s,t)$, c'est-à-dire,

$$\phi(s,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t)e^{ins}.$$

a) *[1 point]* $\phi(s,t)$ est une fonction périodique de la variable s. Déterminer la période de $\phi(s,t)$.

Solution : Avec $e^{i2\pi m} = 1$ pour $m \in \mathbb{Z}$, on trouve la période 2π. On peut donc définir la série de Fourier sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, 2\pi]$.

---

b) *[1 point]* Donner l'expression des $P(n,t)$ en fonction de $\phi(s,t)$.

Solution : Les coefficients d'une série de Fourier complexe sont donnés par

$$P(n,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(s,t)e^{-ins}ds.$$

---

c) *[4 points]* Trouver une équation différentielle pour $\phi(s,t)$ en multipliant l'équation (1) par e^{ins} et sommant sur tous les n.

Solution :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}\frac{dP(n,t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}\alpha\left[P(n+1,t), +P(n-1,t) - 2P(n,t)\right].$$

Le côté gauche de l'équation donne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}\frac{dP(n,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}P(n,t)\right] = \frac{d}{dt}\phi(s,t).$$

Le côté droit de l'équation donne

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}\alpha\left[P(n+1,t) + P(n-1,t) - 2P(n,t)\right] \\
= \quad & \alpha\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}P(n+1,t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}P(n-1,t) - 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins}P(n,t)\right].
\end{aligned}$$

Dans la première somme on fait un changement de variable $n \to k = n+1$ tandis que dans la deuxième somme on fait un changement de variable $n \to l = n-1$. Donc

$$\begin{aligned}
& \alpha \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins} P(n+1,t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins} P(n-1,t) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins} P(n,t) \right] \\
= \quad & \alpha \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(k-1)s} P(k,t) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(l+1)s} P(l,t) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins} P(n,t) \right] \\
= \quad & \alpha \left[e^{-is} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} P(k,t) + e^{is} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ils} P(l,t) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ins} P(n,t) \right] \\
= \quad & \alpha \left[e^{-is}\phi(s,t) + e^{is}\phi(s,t) - 2\phi(s,t) \right] = \alpha(e^{-is} + e^{is} - 2)\phi(s,t) = -2\alpha(1-\cos s)\phi(s,t).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt}\phi(s,t) = -2\alpha(1-\cos s)\phi(s,t).$$

---

d) *[1 point]* Le résulat en c) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(s,t) + f(s)\phi(s,t) = 0$$

avec $f(s) = 2\alpha(1-\cos s)$. Donner la solution générale de cette équation.

<u>Solution</u> *: La solution générale de cette équation est donnée par*

$$\phi(s,t) = A(s)e^{-f(s)t},$$

où $A(s)$ est une fonction de s arbitraire.

---

e) *[2 points]* Les conditions initiales pour $P(n,t)$ fixent celles pour $\phi(s,t)$. Donner $\phi(s,0)$. Déterminer la constante d'intégration de la solution trouvée en d).

<u>Solution</u> *: On a*

$$\phi(s,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,0)e^{ins} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,0}\, e^{ins} = 1.$$

La solution trouvée en d) donne $\phi(s,0) = A(s)$. Donc $A(s) = 1$.

---

f) *[2 points]* La moyenne $\langle n(t) \rangle$ est donnée par

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,t) = -i\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t)\Big|_{s=0}.$$

Montrer que $\langle n(t) \rangle = 0$.

<u>Solution</u> *: Avec $\phi(s,t) = \exp[-2\alpha(1-\cos s)t]$, on obtient*

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t) = e^{-2\alpha(1-\cos s)t}\frac{\partial}{\partial s}\left[-2\alpha(1-\cos s)t\right] = -2\alpha t \sin s\, e^{-\alpha(1-\cos s)t}.$$

Donc

$$\langle n(t) \rangle = i2\alpha t \sin 0\, e^{-\alpha(1-\cos 0)t} = 0.$$

g) *[4 points]* Trouver une expression pour $\langle n^2(t) \rangle$ et déterminer sa valeur.

Solution : En f), on a vu qu'il nous faut $\partial\phi/\partial s$ pour obtenir $\langle n(t) \rangle$. Si on prend la dérivée seconde, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\phi(s,t) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t)e^{ins}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t)\frac{\partial^2}{\partial s^2}e^{ins} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P(n,t)e^{ins}.\end{aligned}$$

Donc

$$\langle n^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P(n,t) = -\frac{\partial^2}{\partial s^2}\phi(s,t)\Big|_{s=0}.$$

Avec

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\phi(s,t) = \left[(-2\alpha t \sin s)^2 - 2\alpha t \cos s\right] e^{-\alpha(1-\cos s)t},$$

on obtient

$$\langle n^2(t) \rangle = -\left[(-2\alpha t \sin 0)^2 - 2\alpha t \cos 0\right] e^{-\alpha(1-\cos 0)t} = 2\alpha t.$$