Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Contrôle continu – 10 novembre 2014

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

Formules utiles :

Séries de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right)\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n x/L} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} f(x)\, e^{-2i\pi n x/L} dx$$

Séries de sinus et cosinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \frac{x}{L}) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n \frac{x}{L}) \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos(\pi n \frac{x}{L})\, dx$$

Transformées de Fourier :

$$\mathrm{TF}[f(x)] = \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iqx} dx \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}(q)] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q)\, e^{iqx} dq$$

Convolutions et corrélations :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s) g(x-s) \qquad C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f^*(s) g(x+s)$$

Formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Séries de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_{-1} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

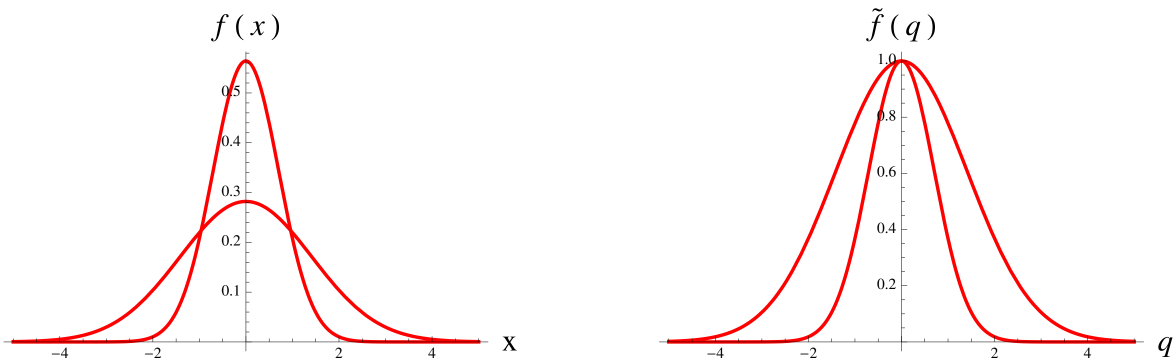
1. Quelques questions courtes (pas de calcul nécessaire). *(∼15%)*

a) On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}$$

Trouver laquelle des séries de Fourier, sinus ou cosinus donne les bonnes valeurs de $f(x)$ aux bords, c'est-à-dire en $x = 0$ et en $x = 2$. Tracer la fonction périodique définie par la série que vous avez choisie sur l'intervalle $\mathcal{I} = [-2, 4]$.

b) Les tracés ci-dessous montrent deux fonctions à gauche ainsi que leurs transformées de Fourier à droite. Indiquer quelle transformée de Fourier correspond à quelle fonction. (Recopier les tracés sur votre copie.)



c) Donner un exemple d'une fonction qui est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{3\}$ et qui possède un pôle en $z_0 = 3$. Indiquer l'ordre de ce pôle.

---

2. Equation de la chaleur : Transformées de Fourier et analyse complexe. *(∼50%)*

On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + Q_0 f(t) \delta(x),$$

où $D, Q_0 \in \mathbb{R}_+$ et $f(t)$ sera spécifiée plus tard.

a) Trouver une équation pour $\tilde{u}(q,t) = \mathrm{TF}_x[u(x,t)]$.

b) Trouver une équation pour $U(q,\omega) = \mathrm{TF}_t[\tilde{u}(q,t)]$ en fonction de $F(\omega) = \mathrm{TF}[f(t)]$.

On va d'abord résoudre le cas $f(t) = \delta(t - t_0)$.

c) Calculer $F(\omega)$.

Pour trouver $u(x,t)$, il nous faudra prendre les transformées de Fourier inverses par rapport à q et ω de

$$U(q,\omega) = \frac{Q_0 e^{-i\omega t_0}}{Dq^2 + i\omega}.$$

d) On commencera par la TF inverse par rapport à ω. Utiliser l'analyse complexe pour trouver $\tilde{u}(q,t)$. Détailler bien tous les étapes : choix du contour, détermination des singularités et calcul des résidus ! Tracer le(s) contour(s) choisi(s) et indiquer la position des singularités.

e) La prochaine étape sera de prendre la TF inverse par rapport à q de

$$\tilde{u}(q,t) = Q_0 e^{-Dq^2(t-t_0)} H(t-t_0),$$

où $H(t)$ est la fonction Heaviside. Trouver $u(x,t)$. Rappel : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

<u>On passera maintenant au cas $f(t)$ arbitraire.</u>

f) Démontrer que la solution s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, u_0(x,s) f(t-s),$$

où $u_0(x,t) = Q_0/(2\sqrt{\pi D t}) e^{-x^2/(4Dt)} H(t)$ est la solution de l'équation de la chaleur pour $f(t) = \delta(t)$, déterminée en e).

g) Donner $u(x,t)$ pour $f(t) = A\,\delta(t+T_a) - B\,\delta(t-T_b)$.

---

3. Mouvement Brownien : Séries de Fourier. *(∼35%)*

On considère une particule sur un réseau discret unidimensionnel de pas d. La particule a une probabilité α par unité de temps de sauter soit à droite, soit à gauche. On cherche à déterminer la probabilité $P(n,t)$ que la particule se trouve sur le site n au temps t. La probabilité $P(n,t)$ obéit à l'équation maîtresse

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = \alpha\left[P(n+1,t) + P(n-1,t) - 2P(n,t)\right]. \tag{1}$$

On choisit les conditions initiales $P(0,0) = 1$ et $P(n \neq 0, 0) = 0$.

Pour résoudre le système d'équations différentielles couplées, on utilisera la méthode de la fonction génératrice. Pour cela, on supposera que les probabilités $P(n,t)$ sont les coefficients de la série de Fourier complexe de la fonction $\phi(s,t)$, c'est-à-dire,

$$\phi(s,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t) e^{ins}.$$

a) $\phi(s,t)$ est une fonction périodique de la variable s. Déterminer la période de $\phi(s,t)$.

b) Donner l'expression des $P(n,t)$ en fonction de $\phi(s,t)$.

c) Trouver une équation différentielle pour $\phi(s,t)$ en multipliant l'équation (1) par e^{ins} et sommant sur tous les n.

d) Le résulat en c) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(s,t) + f(s)\phi(s,t) = 0$$

avec $f(s) = 2\alpha(1-\cos s)$. Donner la solution générale de cette équation.

e) Les conditions initiales pour $P(n,t)$ fixent celles pour $\phi(s,t)$. Donner $\phi(s,0)$. Déterminer la constante d'intégration de la solution trouvée en d).

f) La moyenne $\langle n(t)\rangle$ est donnée par

$$\langle n(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,t) = -i\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t)\Big|_{s=0}.$$

Montrer que $\langle n(t)\rangle = 0$.

g) Trouver une expression pour $\langle n^2(t)\rangle$ et déterminer sa valeur.