UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — JULIA MEYER
L3 PHYSIQUE — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen Final – 9 janvier 2014

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :

- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

1. Quelques questions courtes. $\sum$ = *14 points*

a) *[4 points]* On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

La fonction $f(x)$ peut être développée en série de Fourier ($f_F(x)$), série de sinus ($f_s(x)$) ou série de cosinus ($f_c(x)$) sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0,1]$.

- Déterminez les points $x_i \in \mathcal{I}$ où la fonction f et les séries f_F, f_s et f_c ne prennent pas toutes la même valeur.
- Donnez les valeurs $f(x_i)$, $f_F(x_i)$, $f_s(x_i)$ et $f_c(x_i)$.

<u>Solution</u> : La fonction obéit aux conditions de Dirichlet. Donc la valeur de la série en $x = x_0$ est donnée par $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0^+) + f(x_0-0^+)\right)$. A l'intérieur de l'intervalle $\mathcal{I}$ la fonction est continue. Donc les seuls endroits, où les valeurs de la fonction et des séries peuvent être différentes, sont les bornes de l'intégrale, $x_i = 0, 1$. Pour ces valeurs de x, on trouve

- *fonction : $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$*
- *série de Fourier : $f_F(0) = f_F(1) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = \frac{1}{2}$*
- *série de sinus : $f_s(0) = f_s(1) = 0$*
- *série de cosinus : $f_c(0) = 0$ and $f_c(1) = 1$*

---

b) *[3 points]* Exprimer la transformée de Fourier de $f * (g \cdot h)$ en fonction de $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$, $\tilde{g} = \mathrm{TF}[g]$ et $\tilde{h} = \mathrm{TF}[h]$.

<u>Solution</u> : Avec $TF[a * b] = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$ et $TF[a \cdot b] = \frac{1}{2\pi}\tilde{a} * \tilde{b}$, on obtient

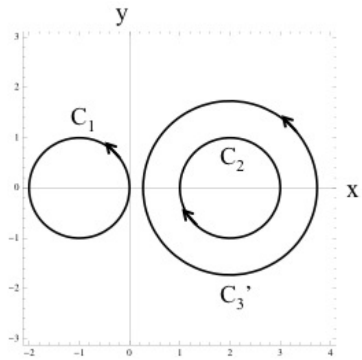
$$TF[f * (g \cdot h)] = \frac{1}{2\pi}\tilde{f} \cdot (\tilde{g} * \tilde{h}).$$

---

c) *[4 points]* On considère la fonction $f(z) = 1/(z-2)$. Tracer trois contours C_1, C_2 et C_3 dans le plan complexe tel que

$$\oint_{C_1} dz\, f(z) = 0, \qquad \oint_{C_2} dz\, f(z) = -2\pi i, \qquad \oint_{C_3} dz\, f(z) = 4\pi i.$$

<u>Solution</u> : La fonction $f(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$. En $z_0 = z$, elle possède un pôle simple.



Le contour $\mathcal{C}_3 = -\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3'$.

---

d) *[3 points]* On considère un opérateur linéaire $\mathcal{L}$. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs propres de $\mathcal{L}$ avec les valeurs propres α et β associées. Sous quelle condition $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ est aussi un vecteur propre de $\mathcal{L}$?

Solution : On obtient

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathcal{L}\mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Donc $\mathcal{L}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ *seulement pour* $\alpha = \beta$.

---

2. Transformées de Fourier et analyse complexe : Diffusion avec dégradation. $\sum$ = *25 points*

Des particules sont introduites dans un milieu uni-dimensionnel infini à la position $x = 0$ et au temps $t = 0$, puis diffusent dans l'espace en se dégradant au taux $\alpha > 0$. Le système est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x)\delta(t), \tag{1}$$

où $c(x,t)$ est la concentration des particules, i.e., $[c] = 1/L$.

a) *[3 points]* Déterminer les dimensions des paramètres D, α et J.

Solution : Pour que l'équation soit homogène, il faut que

$$\left[\frac{\partial c}{\partial t}\right] = \left[D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] = [\alpha c] = [J\delta(x)\delta(t)]\,.$$

Avec $\left[\frac{\partial c}{\partial t}\right] = 1/(LT)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
[D] &= \frac{1}{LT} \times \frac{1}{\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right]} = \frac{L^2}{T}, \\
[\alpha] &= \frac{1}{LT} \times \frac{1}{[c]} = \frac{1}{T}, \\
[J] &= \frac{1}{LT} \times \frac{1}{[\delta(x)\delta(t)]} = 1.
\end{aligned}$$

---

b) *[5 points]* Utiliser les transformées de Fourier pour réduire l'équation (1) d'abord à une équation différentielle ordinaire, puis à une équation algébrique.

Solution : Une TF par rapport à x donne

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = -Dq^2\tilde{c} - \alpha\tilde{c} + J\delta(t).$$

Ensuite une TF par rapport à t donne

$$i\omega \,\tilde{\tilde{c}} = -Dq^2 \,\tilde{\tilde{c}} - \alpha \,\tilde{\tilde{c}} + J.$$

Donc

$$\tilde{\tilde{c}}(q,\omega) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha + i\omega}.$$

L'équation algébrique mène à une expression pour $\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)$. En particulier,

$$\tilde{\tilde{c}}(q,\omega) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha + i\omega}.$$

c) *[9 points]* Utiliser l'analyse complexe pour obtenir $\tilde{c}(q,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)\right]$. Justifier toutes les étapes du calcul.

Solution : La TF inverse est donnée par

$$\tilde{c}(q,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \;\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)e^{i\omega t} = \frac{J}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \;\frac{1}{\omega - i(Dq^2+\alpha)}e^{i\omega t}.$$

La fonction $f(z) = 1/(z - i(Dq^2+\alpha))$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{Dq^2+\alpha\}$ et possède un pôle simple en $z_0 = i(Dq^2+\alpha)$. Ce pôle se trouve dans le plan complexe supérieur, $\Im[z_0] > 0$. En outre, $|f(z)| \to 0$ dans la limite $|z| \to \infty$.

D'après le lemme de Jordan, on peut donc fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$. Pour $t > 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe supérieur ($\Im[z] > 0$) tel que $\Re[izt] > 0$ et $e^{izt} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_+$). Pour $t < 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe inférieur ($\Im[z] < 0$) tel que $\Re[izt] > 0$ et $e^{izt} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_-$).

On obtient

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{2\pi i}\left\{H(t)\oint_{\mathcal{C}_+} dz\;\frac{1}{z - i(Dq^2+\alpha)}e^{izt} + H(-t)\oint_{\mathcal{C}_-} dz\;\frac{1}{z - i(Dq^2+\alpha)}e^{izt}\right\}.$$

Comme la fonction n'a pas de singularité dans le plan complexe inférieur, l'intégrale sur le countour $\mathcal{C}_-$ est nulle. Donc

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{2\pi i}H(t)\oint_{\mathcal{C}_+} dz\;\frac{1}{z - i(Dq^2+\alpha)}e^{izt}.$$

Avec le calcul des résidus, on trouve

$$\tilde{c}(q,t) = \frac{J}{2\pi i}H(t)2\pi i\;\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z - i(Dq^2+\alpha)}e^{izt}; z_0\right] = JH(t)e^{-(Dq^2+\alpha)t}.$$

---

d) *[2 points]* Déterminer le nombre de particules, $N(t) = \int dx\; c(x,t)$.

Solution : En utilisant la définition de la TF, on trouve

$$N(t) = \int dx\; c(x,t) = \tilde{c}(0,t) = JH(t)e^{-\alpha t}.$$

---

e) *[6 points]* Calculer $c(x,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}(q,t)\right]$ avec

$$\tilde{c}(q,t) = J \exp\left[-(Dq^2+\alpha)t\right] H(t),$$

où $H(t)$ est la fonction Heaviside.

<u>Solution</u> : On obtient

$$\begin{aligned} c(x,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}(q,t)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \tilde{c}(q,t) e^{iqx} \\ &= \frac{J}{2\pi} H(t) e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \tilde{c}(q,t) e^{-Dq^2 t + iqx}. \end{aligned}$$

On utilise

$$-Dq^2 t + iqx = -Dt\left(q^2 - i\frac{x}{Dt}q\right) = -Dt\left(q - i\frac{x}{2Dt}\right)^2 - Dt\left(\frac{x}{2Dt}\right)^2.$$

Donc

$$c(x,t) = \frac{J}{2\pi} H(t) e^{-\alpha t - \frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-Dt\left(q - i\frac{x}{2Dt}\right)^2}.$$

Après on changement de variable $q \to Q = \sqrt{Dt}(q - i\frac{x}{2Dt})$, on peut évaluer l'intégrale Gaussienne $\int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ afin d'obtenir

$$c(x,t) = \frac{J}{2\pi} H(t) e^{-\alpha t - \frac{x^2}{4Dt}} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}}.$$

---

3. Calcul des perturbations : Pendule forcé. $\sum$ = *27 points*

Nous considérons l'équation d'un pendule forcé,

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \omega_0^2 \sin\theta = F\cos(\omega t). \tag{2}$$

Ici, $\omega_0 > 0$ est la fréquence propre du pendule, alors que $F\cos(\omega t)$ est un terme de forçage.

Pour commencer, nous prenons $F = 0$.

a) *[3 points]* Déterminer les positions d'équilibre du pendule.

<u>Solution</u> : A $F = 0$, on a $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. Les positions d'équilibre correspondent à des solutions $\theta = \mathrm{cste}$, c'est-à-dire, $\ddot{\theta} = 0$. Donc les positions d'équilibre sont données par $\sin\theta_0 = 0$. On trouve $\theta_0 = 0, \pi$.

---

b) *[6 points]* Développer $\sin\theta$ jusqu'au premier ordre autour des positions d'équilibre et déterminer la stabilité linéaire des positions d'équilibre.

<u>Solution</u> : Le développement au premier ordre donne

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\,(\theta - \theta_0).$$

Pour $\theta_0 = 0$, on trouve

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Donc $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, c'est-à-dire, la position d'équilibre $\theta_0 = 0$ est stable.

Pour $\theta_0 = \pi$, on trouve

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2(\theta - \theta_0) = 0.$$

Donc $\theta(t) = \pi + C\cosh(\omega_0 t) + D\sinh(\omega_0 t)$, c'est-à-dire, la position d'équilibre $\theta_0 = 0$ est instable.

Maintenant nous étudions le pendule forcé, $F \neq 0$.

c) *[2 points]* Développer $\sin\theta$ jusqu'au troisième ordre autour de $\theta = 0$.

<u>Solution</u> : Le développement au troisième ordre donne

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0\,(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\sin\theta_0\,(\theta-\theta_0)^2 - \frac{1}{6}\cos\theta_0\,(\theta-\theta_0)^3.$$

Donc pour $\theta_0 = 0$, on trouve $\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$.

---

d) *[4 points]* Montrer que l'équation obtenue peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta + \Omega^2\theta - \epsilon\theta^3 = \Gamma\cos\tau. \tag{3}$$

Donner les expressions des quantités τ, Ω, ϵ et Γ ainsi que leurs unités.

<u>Solution</u> : Avec le développement de c), l'équation prend la forme

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \omega_0^2\theta - \frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 = F\cos(\omega t).$$

On définit $\tau = \omega t$ pour trouver

$$\omega^2\frac{d^2}{d\tau^2}\theta + \omega_0^2\theta - \frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 = F\cos(\tau).$$

Une division par ω^2 donne

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta + \Omega^2\theta - \epsilon\theta^3 = \Gamma\cos\tau$$

avec $\Omega = \omega_0/\omega$, $\epsilon = \Omega^2/6$ et $\Gamma = F/\omega^2$. Toutes les variables sont sans dimension.

Nous nous concentrons sur des petites oscillations, $\theta \ll 1$. Dans ce cas, le terme cubique en θ peut être considéré comme perturbation. Donc nous faisons un calcul perturbatif en ϵ. C'est-à-dire, nous cherchons une solution de l'équation (3) sous la forme $\theta(\tau) = \theta_0(\tau) + \epsilon\theta_1(\tau) + \ldots$.

e) *[4 points]* Trouver les équations différentielles pour θ_0 et pour θ_1.

<u>Solution</u> : En substituant $\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1$ dans l'équation, on trouve

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta_0 + \epsilon\frac{d^2}{d\tau^2}\theta_1 + \Omega^2\theta_0 + \epsilon\Omega^2\theta_1 - \epsilon\theta_0^3 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \Gamma\cos\tau.$$

A l'ordre ϵ^0 :

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta_0 + \Omega^2\theta_0 = \Gamma\cos\tau.$$

A l'ordre ϵ^1 :

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta_1 + \Omega^2\theta_1 - \theta_0^3 = 0.$$

---

f) *[3 points]* Démontrer que

$$\theta_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos\tau$$

résout l'équation différentielle pour θ_0. Sous quelles conditions notre calcul perturbatif est justifié ?

<u>Solution</u> : Avec $\ddot{\theta}_0 = -\theta_0$, on obtient

$$-\theta_0 + \Omega^2\theta_0 = (\Omega^2 - 1)\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos\tau = \Gamma \cos\tau.$$

Donc θ_0 est une solution de l'équation différentielle.

Le calcul perturbatif est justifié pour $\theta \ll 1$. Pour cela il faut que $|\Gamma/(\Omega^2 - 1)| \ll 1$.

---

g) *[4 points]* Utiliser la solution pour θ_0 donnée en f) afin d'obtenir une solution particulière pour θ_1.

Rappel : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\left[3\cos x + \cos(3x)\right]$.

<u>Solution</u> : L'équation pour θ_1 prend la forme

$$\ddot{\theta}_1 + \Omega^2\theta_1 = \theta_0^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\right)^3 \left[3\cos\tau + \cos(3\tau)\right].$$

On cherche une solution particulière sous la forme $\theta_1 = \alpha\cos\tau + \beta\cos(3\tau)$. On obtient

$$-\alpha\cos\tau - 9\beta\cos(3\tau) + \alpha\Omega^2\cos\tau + \beta\Omega^2\cos(3\tau) = \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\right)^3 \left[3\cos\tau + \cos(3\tau)\right].$$

Donc

$$\alpha = \frac{3}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2 - 1)^4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}\frac{\Gamma^3}{(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)}.$$

---

h) *[1 point]* Pour l'oscillateur de Duffing considéré en cours, un calcul perturbatif plus sophistiqué était nécessaire. Pourquoi ce n'est pas le cas ici ?

<u>Solution</u> : Dans le cas de l'oscillateur de Duffing la perturbation modifie la pulsation des oscillations tandis qu'ici la pulsation est déterminée par la force extérieure.

---

4. Opérateurs linéaires : Polynômes orthogonaux. $\sum$ = *20 points*

Pour deux fonctions $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, nous définissons le produit scalaire

$$(f, g)_w = \int_0^\infty dx\; w(x)\, f^*(x) g(x) \tag{4}$$

avec $w(x) = e^{-x}$.

On appelle polynômes orthogonaux des polynômes $P_n(x)$ de degré n, orthogonaux les uns aux autres au sens du produit scalaire (4) et tels que $P_n(0) = 1$.

a) *[4 points]* Trouver les trois premiers polynômes $P_n(x)$, c'est-à-dire, P_0, P_1 et P_2.

Indication : $\int_0^\infty dx\; x^n e^{-x} = n!$

Solution : On obtient

— $P_0(x) = 1$

— $P_1 = 1 + ax$ *La condition d'orthogonalité impose*

$$0 = \int_0^\infty dx\, e^{-x} 1 \cdot (1 + ax) = 1 + a.$$

Donc $a = -1$, *c'est-à-dire,* $P_1(x) = 1 - x$.

— $P_2 = 1 + bx + cx^2$ *La condition d'orthogonalité impose*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty dx\, e^{-x} 1 \cdot (1 + bx + cx^2) = 1 + b + 2c, \\ 0 &= \int_0^\infty dx\, e^{-x}(1 - x) \cdot (1 + bx + cx^2) = 1 + b + 2c - 1 - 2b - 6c = -b - 4c. \end{aligned}$$

Donc $b = -4c = -2$, *c'est-à-dire,* $P_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$.

---

b) *[3 points]* Démontrer que les polynômes P_0, P_1 et P_2 sont normés, $(P_i, P_i)_w = 1$ $(i = 0, 1, 2)$.

Solution : On obtient

$$\begin{aligned} (P_0, P_0)_w &= \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1, \\ (P_1, P_1)_w &= \int_0^\infty dx\, e^{-x}(1 - x)^2 = 1 - 2 + 2 = 1, \\ (P_2, P_2)_w &= \int_0^\infty dx\, e^{-x}(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2)^2 = 1 - 2 + 1 - 2 + 8 - 6 + 1 - 6 + 6 = 1. \end{aligned}$$

---

c) *[4 points]* Soit l'opérateur $\mathcal{L}$ définit par

$$\mathcal{L}f = xf'' + (1 - x)f'.$$

Déterminer l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^\dagger$ par rapport au produit scalaire (4).

Solution : L'opérateur adjoint est défini par $(\mathcal{L}^\dagger f, g)_w = (f, \mathcal{L}g)_w$. *On trouve*

$$\begin{aligned} (f, \mathcal{L}g)_w &= \int_0^\infty dx\, e^{-x} f^*(x) \left[xg''(x) + (1 - x)g'(x)\right] \\ &= \left[e^{-x} f^*(x) x g'(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x} f^*(x) x\right) g'(x) \\ &\quad + \left[e^{-x} f^*(x)(1 - x)g(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x} f^*(x)(1 - x)\right) g(x) \\ &= -\left[\frac{d}{dx}\left(e^{-x} f^*(x) x\right) g(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty dx\, \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x} f^*(x) x\right) g(x) \\ &\quad - f^*(0)g(0) - \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x} f^*(x)(1 - x)\right) g(x) \\ &= \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(-e^{-x} f^*(x) x + e^{-x} f'^*(x) x + e^{-x} f^*(x)\right) g(x) - \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x} f^*(x)(1 - x)\right) g(x) \\ &= \int_0^\infty dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{-x} f'^*(x) x\right) g(x) = \int_0^\infty dx\, \left(-e^{-x} f'^*(x) x + e^{-x} f''^*(x) x + e^{-x} f'^*(x)\right) g(x) \\ &= \int_0^\infty dx\, e^{-x} \left(xf''(x) + (1 - x)f'(x)\right)^* g(x) = \int_0^\infty dx\, e^{-x} \left(\mathcal{L}f\right)^* g(x) = (\mathcal{L}f, g)_w. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$.

---

d) *[1 point]* Est-ce que l'opérateur $\mathcal{L}$ est hermitien ?

<u>Solution</u> : D'après c), $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$. C'est-à-dire, $\mathcal{L}$ est hermitien.

---

e) *[4 points]* Pour déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur, on considère l'équation

$$\mathcal{L}f = -\lambda f \qquad \text{avec } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Déterminer une relation de récurrence pour les coefficients c_k.

<u>Solution</u> : Avec

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \qquad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f &= x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k^2 c_k x^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 c_{k+1} x^k + c_1 - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1)^2 c_{k+1} - k c_k\right) x^k \\
&= -\lambda f = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k
\end{aligned}$$

Le sommes doivent être égaux terme par terme. Donc

$$(k+1)^2 c_{k+1} - k c_k = -\lambda c_k \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{k+1} = \frac{k-\lambda}{(k+1)^2} c_k.$$

---

f) *[2 points]* Déduire du résultat de e) que pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$, la solution associée est un polynôme de degré n. On appelle cette solution $f_{(n)}$.

<u>Solution</u> : Pour $\lambda = n$, la relation de récurrence obtenu en e) implique $c_k = 0$ pour $k > n$ tandis que $c_n \neq 0$. Donc la solution est un polynôme de degré n.

---

g) *[2 points]* Quelle est la relation entre les polynômes orthogonaux P_n et les vecteurs propres $f_{(n)}$? Justifier.

<u>Solution</u> : Comme l'opérateur $\mathcal{L}$ est hermitien, les vecteur propres correspondant à des différentes valeurs propres sont orthogonaux, $(f_{(n)}, f_{(m)})_w = 0$ pour $n \neq m$. En choisissant $c_0 = 1$, les fonctions $f_{(n)}$ sont les polynômes orthogonaux P_n.