Université Joseph Fourier — Julia Meyer
L3 Physique — julia.meyer@ujf-grenoble.fr

L3 – Mathématique pour la physique
Examen Final – 9 janvier 2014

Modalités : Notes de cours et TDs permis.

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION :
- Choisissez d'abord les problèmes qui vous plaisent le plus. Faites les autres que vous trouvez difficiles à la fin.
- Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
- La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concise, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seule une argumentation correcte rapporte des points.

1. Quelques questions courtes. *(∼15%)*

a) On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

La fonction $f(x)$ peut être développée en série de Fourier ($f_F(x)$), série de sinus ($f_s(x)$) ou série de cosinus ($f_c(x)$) sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0,1]$.
- Déterminez les points $x_i \in \mathcal{I}$ où la fonction f et les séries f_F, f_s et f_c ne prennent pas toutes la même valeur.
- Donnez les valeurs $f(x_i)$, $f_F(x_i)$, $f_s(x_i)$ et $f_c(x_i)$.

b) Exprimer la transformée de Fourier de $f * (g \cdot h)$ en fonction de $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$, $\tilde{g} = \mathrm{TF}[g]$ et $\tilde{h} = \mathrm{TF}[h]$.

c) On considère la fonction $f(z) = 1/(z-2)$. Tracer trois contours C_1, C_2 et C_3 dans le plan complexe tel que

$$\oint_{C_1} dz\; f(z) = 0, \qquad \oint_{C_2} dz\; f(z) = -2\pi i, \qquad \oint_{C_3} dz\; f(z) = 4\pi i.$$

d) On considère un opérateur linéaire $\mathcal{L}$. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs propres de $\mathcal{L}$ avec les valeurs propres α et β associées. Sous quelle condition $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ est aussi un vecteur propre de $\mathcal{L}$?

2. Transformées de Fourier et analyse complexe : Diffusion avec dégradation. *(∼30%)*

Des particules sont introduites dans un milieu uni-dimensionnel infini à la position $x = 0$ et au temps $t = 0$, puis diffusent dans l'espace en se dégradant au taux $\alpha > 0$. Le système est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha c + J\delta(x)\delta(t), \tag{1}$$

où $c(x,t)$ est la concentration des particules, i.e., $[c] = 1/L$.

a) Déterminer les dimensions des paramètres D, α et J.

b) Utiliser les transformées de Fourier pour réduire l'équation (1) d'abord à une équation différentielle ordinaire, puis à une équation algébrique.

L'équation algébrique mène à une expression pour $\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)$. En particulier,

$$\tilde{\tilde{c}}(q,\omega) = \frac{J}{Dq^2 + \alpha + i\omega}.$$

c) Utiliser l'analyse complexe pour obtenir $\tilde{c}(q,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{\tilde{c}}(q,\omega)\right]$. Justifier toutes les étapes du calcul.

d) Déterminer le nombre de particules, $N(t) = \int dx\, c(x,t)$.

e) Calculer $c(x,t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{c}(q,t)\right]$ avec

$$\tilde{c}(q,t) = J \exp\left[-(Dq^2 + \alpha)t\right] H(t),$$

où $H(t)$ est la fonction Heaviside.

---

3. Calcul des perturbations : Pendule forcé. *(∼30%)*

Nous considérons l'équation d'un pendule forcé,

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \omega_0^2 \sin\theta = F\cos(\omega t). \tag{2}$$

Ici, $\omega_0 > 0$ est la fréquence propre du pendule, alors que $F\cos(\omega t)$ est un terme de forçage.

Pour commencer, nous prenons $F = 0$.

a) Déterminer les positions d'équilibre du pendule.

b) Développer $\sin\theta$ jusqu'au premier ordre autour des positions d'équilibre et déterminer la stabilité linéaire des positions d'équilibre.

Maintenant nous étudions le pendule forcé, $F \neq 0$.

c) Développer $\sin\theta$ jusqu'au troisième ordre autour de $\theta = 0$.

d) Montrer que l'équation obtenue peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\theta + \Omega^2\theta - \epsilon\theta^3 = \Gamma\cos\tau. \tag{3}$$

Donner les expressions des quantités τ, Ω, ϵ et Γ ainsi que leurs unités.

Nous nous concentrons sur des petites oscillations, $\theta \ll 1$. Dans ce cas, le terme cubique en θ peut être considéré comme perturbation. Donc nous faisons un calcul perturbatif en ϵ. C'est-à-dire, nous cherchons une solution de l'équation (3) sous la forme $\theta(\tau) = \theta_0(\tau) + \epsilon\theta_1(\tau) + \dots$.

e) Trouver les équations différentielles pour θ_0 et pour θ_1.

f) Démontrer que

$$\theta_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau$$

résout l'équation différentielle pour θ_0. Sous quelles conditions notre calcul perturbatif est justifié ?

g) Utiliser la solution pour θ_0 donnée en f) afin d'obtenir une solution particulière pour θ_1.

Rappel : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\left[3\cos x + \cos(3x)\right]$.

h) Pour l'oscillateur de Duffing considéré en cours, un calcul perturbatif plus sophistiqué était nécessaire. Pourquoi ce n'est pas le cas ici ?

---

4. Opérateurs linéaires : Polynômes orthogonaux. *(∼25%)*

Pour deux fonctions $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, nous définissons le produit scalaire

$$(f, g)_w = \int_0^\infty dx\; w(x)\, f^*(x) g(x) \tag{4}$$

avec $w(x) = e^{-x}$.

On appelle polynômes orthogonaux des polynômes $P_n(x)$ de degré n, orthogonaux les uns aux autres au sens du produit scalaire (4) et tels que $P_n(0) = 1$.

a) Trouver les trois premiers polynômes $P_n(x)$, c'est-à-dire, P_0, P_1 et P_2.

Indication : $\int_0^\infty dx\; x^n e^{-x} = n!$

b) Démontrer que les polynômes P_0, P_1 et P_2 sont normés, $(P_i, P_i)_w = 1$ $(i = 0, 1, 2)$.

c) Soit l'opérateur $\mathcal{L}$ définit par

$$\mathcal{L}f = xf'' + (1 - x)f'.$$

Déterminer l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^\dagger$ par rapport au produit scalaire (4).

d) Est-ce que l'opérateur $\mathcal{L}$ est hermitien ?

e) Pour déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur, on considère l'équation

$$\mathcal{L}f = -\lambda f \qquad \text{avec } \; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Déterminer une relation de récurrence pour les coefficients c_k.

f) Déduire du résultat de e) que pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$, la solution associée est un polynôme de degré n. On appelle cette solution $f_{(n)}$.

g) Quelle est la relation entre les polynômes orthogonaux P_n et les vecteurs propres $f_{(n)}$? Justifier.